وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

جبر خطی

مایکل اونان

ترجمهٔ علی اکبر محمدی حسن آبادی

جبر خطی

مایکل اونان

ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی

مرکز نشر دانشگاهی

فهرست

عنوان | صفحه

عنوان | صفحه

بسم‌الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار مترجم

ضمن‌سالها تدریس جبرخطی در دانشگاه اصفهان، همواره سعی می‌کرده‌ام با ارائهٔ مثالهای‌کاربردی درزمینه‌های مختلف، دانشجویان را درفراگیری مطالب یاری دهم. کتاب حاضر، که از روی چاپ دوم جبرخطی نوشتهٔ مایکل اونان ترجمه شده، حاوی مجموعه‌ای ازمثالها و تمرینهای ملموس و متنوع است‌که هم از لحاظ ریاضی جالب وغنی است وهم نشان‌دهندهٔ کاربردهایی‌ازجبرخطی درزمینه‌های‌گوناگون علوم ومهندسی است. شیوهٔ ارائهٔ مطالب آن، حرکت ازمفاهیم عینی وساده به‌سوی مفاهیم انتزاعی‌است؛ این روش ازلحاظ آموزشی دارای این فایده است که دانشجویان آسانتر می‌توانند به یك دیـد تجریدی از مفاهیم دست یابند. به‌همین دلایل بودکه تصمیم به ترجمهٔ‌کتاب حاضرگرفته شد.

در ترجمه، تا حد امکان از واژه‌های پیشنهادی انجمن ریاضی ایران استفاده شده و واحدها نیز دردستگاه متری آورده شده‌اند.

ازخوانندگان‌کتاب تقاضا می‌شودکه چنانچه به‌مواردی ازاشکال، درروانی جملات یا احیاناً نقل مفاهیم، برخوردکردند، برمترجم منت نهاده واو را ازآن موارد آگاه سازند تا انشاءالله درچاپهای بعدی، کتاب ازنواقص احتمالی پیراسته‌گردد.

مترجم، ازهمکاران مرکزنشر دانشگاهی بویژه جناب‌آقای دکترنصرالله پورجوادی مدیر مرکز، جناب‌آقای دکترعلی اکبرجعفریان سرپرست‌گروه تخصصی ریاضی، آمار، و کامپیوتر، بـه‌خاطرهمکاریهای بی‌دریغشان، جناب آقـای سیامك‌کاظمی به واسطهٔ ویرایش ارزندهٔ متن‌ترجمه، ازکلیه‌کارکنان‌گروه تخصصی ریاضی، آمار، وکامپیوتر، ازکلیهٔ‌کارکنان واحد تولید مرکز نشر دانشگاهی، و چاپخانهٔ دانشگاه صنعتی شریف، تشکر وسپاسگزاری می‌نماید.

علی‌اکبر محمدی حسن آبادی
گروه ریاضی
دانشگاه اصفهان

پیشگفتار مؤلف

از زمان انتشار چاپ اول این کتاب، بسیاری از استادان و دانشجویانی که آن را مطالعه کرده‌اند، ابراز علاقه نموده‌اند که تعداد بیشتری‌از مثالهایی را که جنبهٔ کاربردی دارند، در کتاب بگنجانیم. این چاپ شامل بسیاری از این گونه مثالهاست که از رشته‌های متعددی چون فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، وعلوم رفتاری برگزیده شده‌اند. به‌طورکلی، مثالها کاملاً ساده‌اند و ازآوردن مثالهایی که نیاز به توضیح طولانی دارند، اجتناب شده است.

سایر تجدیدنظرهایی که در متن به عمل‌آمده، از سه نوع‌اند. اول اینکه بسیاری از موضوعات، بویژه هم ارزی دستگاههای خطی واعمال سطری وستونی دترمینانها، به‌صورت ساده‌تری مورد بحث قرار گرفته‌اند. دوم اینکه مطالبی که مورد علاقهٔ عموم خوانندگان نبوده‌اند، ازقبیل چند مثال پیچیده و پاره‌ای مطالب غیرضروری دربارهٔ رتبه، حذف شده‌اند. سوم اینکه بحث مربوط به‌مقادیر ویژه و صورتهای متعارف، تفصیل بیشتری یافته است و تمرینهای جدیدی که بسیاری ازآنها ماهیت کاربردی دارند، اضافه شده‌اند.

با این همه، خصلت اساسی کتاب تغییر نکرده است؛ هستهٔ اصلی آن برای یک درس نیمساله در سطح سال دوم دانشگاه در نظرگرفته شده است. با افزودن بعضی مطالب جدید، می‌توان‌آن را درسطح سال سوم نیز تدریس کرد.

برای اینکه موضوعات کتاب تجریدی نباشند، به آنها جوهر هندسی بخشیده‌ایم. هر یک از مفاهیم و مثالها به‌طورعینی با تجسم مناسب خود در فضای دو (و سه) بعدی مربوط شده است. معرفی مفاهیم جدید، با مثالهای عددی مشروحی همراه است. کلیهٔ مسائل عینی در مورد مفاهیمی که در پنج فصل اول‌آمده‌اند، با روشهایی شبیه به روش حذفی گاوسی، قابل حل‌اند. هر جا ممکن بوده، با ارائهٔ مدل، پدیده‌های جبرخطی را عینیت بخشیده‌ایم. به این جهت، مثلاً، ضرب و توان ماتریسها، وماتریسهای جابجایی‌ناپذیر، در جبرماتریسها مورد بحث قرار گرفته‌اند. هرمفهوم جبری، از نظر تجربی تشریح شده است. به این دلایل، مطالب کتاب باید برای تمام دانشجویان، صرفنظرازرشتهٔ تخصصی‌آنها، قابل استفاده باشد.

طرح کلی کتاب، حرکت از مفاهیم عینی به سوی مفاهیم مجرد است. مطالب کتاب به طورطبیعی به دوقسمت تقسیم‌شده‌اند. درقسمت نخست، به‌معادلات خطی، بردارهای ستونی، ماتریسها، ودترمینانها پرداخته‌ایم؛ در قسمت دوم، فضاهای برداری، تبدیلات خطی، و ضرب داخلی بررسی شده‌اند. به این ترتیب، خواننده می‌تواند تدریجاً از روشهای محاسباتی به

سمت مفاهیم پیچیده‌تر برود بدون‌آنکه در اعماق تجرید ریاضی سقوط کند (یا به ارتفاعات آن صعود کند، بسته به نظرگاه خواننده). این ترتیب مباحث، فایدهٔ دیگری نیز دارد و آن این است که وقتی فضاهای برداری، تبدیلات خطی و سایر اشیاء مجرد معرفی می‌شوند، مسائل مربوط به‌آنها از قبل فراهم شده است. هر جا میسر بوده، تعبیر هندسی طبیعی مفاهیم، ارائه شده است ؛ مثلاً بردارها به‌عنوان پاره خطهای جهت‌دار، دترمینانها به‌عنوان سطحها و حجمها، تبدیلات خطی به عنوان دورانها، تقارنها و تصویرها، و غیره، تعبیر شده‌اند.

در فصل ۱، دستگاههای معادلات مورد بحث قرار می‌گیرند و بویژه بر روش حذفی گاوسی برای حل‌آنها تأکید می‌شود.

فصل ۲، با مطالعهٔ بردارها در فضای سه بعدی حقیقی آغاز می‌شود. پس از تعریف هندسی جمع ، و ضرب اسکالر، اعمال معمولی روی مؤلفه‌ها را استنتاج می‌کنیم که متناظرند با اعمال روی‌بردارها. خطها وسایر اشیاء هندسی در این رابطه مورد مطالعه قرار می‌گیرند. فضاهای با بعد بزرگتر، به عنوان فضاهای بردارهای ستونی معرفی می‌شوند. سپس ماتریسها، و اعمال جمع و ضرب روی‌آنها، تعریف می‌شوند. مفهوم وارون ماتریس‌و سودمندی‌آن در حل دستگاههای معادلات خطی، مورد تأکید خاص قرار می‌گیرند.

در فصل ۳، به دترمینانها می‌پردازیم و این بحث را با بررسی حالت ۲ × ۲ آغاز می‌کنیم. این کار عمدتاً برای آشنا ساختن دانشجویان با اعمال سطری و ستونی، و با توجه به این امرصورت می‌گیرد که احتمالاً دانشجویان، دترمینان را ازقبل می‌شناسند. برای حالتی که با بعدهای بزرگتر سروکار داریم، یک تعریف استقرایی با استفاده از بسط همسازه‌ای ارائه می‌شود. بیشتر تأکید بر خواص دترمینان (اعمال سطری و ستونی) است تا بر تعریف رسمی‌آن. خاصیت ضربی‌دترمینانها ثابت می‌شود و سودمندی‌آنها در‌یافتن وارون ماتریسهاو حل دستگاههای معادلات خطی، خاطرنشان می‌گردد. به‌علاوه، تکنیک عملی‌تر وارون کردن ماتریسها از طریق حذف ترکیبی، به دانشجویان عرضه می‌شود.

در فصل ۴، فضاهای برداری مجرد معرفی می‌شوند. چون ممکن است این، اولین برخورد دانشجو با اشیاء مجرد ریاضی باشد، رهیافتی آهسته و تدریجی اختیار شده است. بخشهای جداگانه‌ای به هر یک از مفاهیم پدید آوردن ، استقلال خطی، زیر فضاها و پایه اختصاص یافته است. درهر مورد، تعبیر مفهوم مربوطه در فضای دو (وسه) بعدی می‌آید و سپس قضایای اصلی دربارهٔ بعد و پایه به‌دست می‌آیند.

در فصل پنجم، تبدیلات خطی تعریف و تشریح می‌شوند. در این فصل نیز مانند فصل ۴، حرکت ما کند است؛ بخش‌کاملی به فضای‌مقادیر تبدیل‌خطی اختصاص‌یافته‌است ودربخشهای دیگر، فضای پوچ مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس تکنیک محاسبهٔ رتبهٔ ماتریس با استفاده از اعمال سطری و ستونی‌را شرح می‌دهیم. (چون این بخش برای‌مطالب بعدی ضروری نیست، می‌توان‌آن را حذف کرد.) پس ازآن مفاهیم وارون ویکریختی را مطالعه می‌کنیم. نمایش ماتریسی تبدیل خطی نیز، که به انتخاب پایه بستگی دارد، در این فصل شرح داده می‌شود. قضایای معمولی راجع به ارتباط رتبه و پوچی تبدیلات خطی به‌دست می‌آیند و همین طور قضایای راجع به یکریختی و بعد.

در فصل ۶، ابتدا ضرب نقطه‌ای و برداری در فضای سه بعدی مطالعه می‌شود تا زمینه‌ای برای بررسی ضربهای داخلی درحالت کلی به دست آید. تعریف هندسی وتعریف جبری این کمیتها ارائه می‌شود. بخشهای بعدی، تعریف ضربهای داخلی در $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ را در-بردارند و تعامد، مکملهای متعامد، پایهٔ متعامد یکه و غیره را مورد بحث قرار می‌دهند. نتایجی ازقبیل نامساوی کوشی ــ شوارتس، نامساوی بسل وروش متعامد سازی گرام اشمیت به دست می آیند.

درفصل آخر، مقادیرویژه تعریف، وخواص اصلی آنها بیان می‌شوند. همچنین خاصیت قطری شدنی ماتریسهای متقارن را نشان می‌دهیم. سپس صورت نرمال ژوردان به دست می آید وبالاخره، با صورتهای دو خطی باختصار آشنا می‌شوید.

هر بخش، شامل تمرینات بسیار است؛ برخی از این تمرینها برای آن است که دانشجو بتواند در عملیات محاسباتی معمولی مهارت یابد، و برخی دیگر ادراک او را از نظریه می‌آزمایند و او را به اثبات نتایج عمیقتر فرا می‌خوانند.

پاسخ تمرینهای برگزیده را در پایان کتاب می‌توان یافت.

مایکل اونان[1]

1· Michael O'nan

۱

دستگاههای معادلات خطی

۱ مقدمه

ضمن حل مسائل در ریاضیات و یا کاربردهای آن درعلوم فیزیکی، زیستی، یا اجتماعی، غالباً به دستگاههای معادلات خطی برمی‌خوریم. از لحاظ تاریخی، جبرخطی در اثر تلاش برای ارائهٔ روشهایی جهت حل این دستگاهها ایجاد شده است. لذا، مقتضی است که این کتاب را با بررسی دستگاههای معادلات خطی آغاز کنیم.

به عنوان اولین مثال، مسئلهٔ یافتن کلیهٔ اعداد حقیقی x و yای را که در دومعادلهٔ

$$\begin{aligned} x + y &= ۴ \\ ۲x - y &= ۵ \end{aligned}$$

صدق می کنند درنظر می‌گیریم.

این مسئله تعبیری هندسی دارد. هر معادله، خطی را در صفحهٔ دکارتی تعریف می‌کند. از آنجا که خواست مسئله یافتن نقطه‌ای است که درهر دومعادله صدق کند، باید نقطه‌ای را تعیین کنیم کـه درآن، دوخط یکدیگر را قطع می‌کنند. این دوخط نه موازی‌اند و نه منطبق برهم. پس نقطهٔ تقاطع یکتاست. (ر. ک. شکل[1] ۱.۱). برای تعیین مختصات نقطهٔ تقاطع، به روش آشنای حذفی متوسل می‌شویم. از دستگاه معادلات اولیه شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x + y &= ۴ \\ ۲x - y &= ۵ \end{aligned}$$

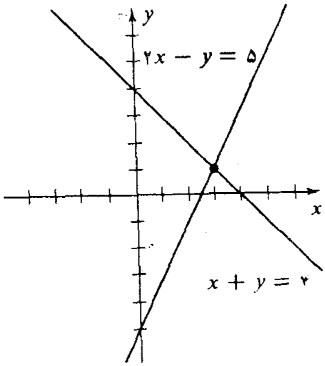
$$\downarrow$$

معادلهٔ اول را به معادلهٔ دوم می‌افزاییم.

$$\begin{aligned} x + y &= ۴ \\ ۳x \phantom{{}+y} &= ۹ \end{aligned}$$

---

۱. مخفف «رجوع کنید به شکل»



شکل ۱۰۱

معادلهٔ دوم را در ۳/۱ ضرب می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x + y &= ۴ \\ x \quad &= ۳ \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم را ازمعادلهٔ اول کم می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} y &= ۱ \\ x \quad &= ۳ \end{aligned}$$

به این ترتیب، می‌بینیم که نقطهٔ (۱ و۳) تنها جواب دستگاه معادلات جدید است. ازسوی دیگر، چون هرمرحله از رشته اعمال فوق برگشتپذیر است، مشاهده می‌کنیم که (۱ و۳) در واقع یک جواب برای دستگاه معادلات اولیه می‌باشد.

دراین مثال، دیدیم‌که دستگاه معادلات‌خطی جوابی یکتا دارد. لکن، دستگاههایی ازمعادلات هستند که هیچ جوابی ندارند و دستگاههایی از معادلات وجود دارند که دارای بینهایت جواب می‌باشند.

به عنوان مثالی ازنوع اول، دستگاه

$$۲x + ۴y = ۳$$

$$۳x + ۶y = ۱$$

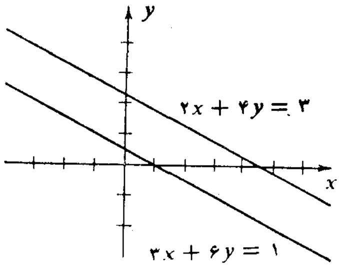
را داریم.

برای ملاحظهٔ این مطلب، فرض‌می‌کنیم جوابی برای‌دستگاه فوق وجود داشته باشد. معادلهٔ اول را در ۳ و معادلهٔ دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$۶x + ۱۲y = ۹$$

$$۶x + ۱۲y = ۲$$

که به‌معنی ۲ = ۹ می‌باشد، وبوضوح نامعقول است. لـذا، دراین حالت بـرای دستگـاه معادلات‌مفروض هیچ جوابی وجود ندارد. از نظرهندسی، خطوط تعیین‌شده به وسیلهٔ معادلات فوق، خطوط موازی متمایزی هستند (ر. ک. شکل ۲.۱)، و تلاش برای یافتن نقطهٔ تقاطع بیهوده است.



شکل ۲۰۱

به‌عنوان مثالی ازیک دستگاه با بینهایت جواب، دستگاه معادلات

$$x + ۲y = ۳$$
$$۳x + ۶y = ۹$$

را داریم.

دراین حالت، معادلات ازنظر ظاهری با یکدیگر متفاوت‌اند، ولی، درحقیقت، هر دو نمایشگر یک خط هستند. در واقع معادلهٔ دوم مضربی از معادلهٔ اول می‌باشد. واضح است که تمامی خط، مجموعهٔ جوابهای دستگاه خواهد بود.

مسائل بسیاری، هم عملی و هم سرگرم کننده، وجود دارند که جواب آنها را می‌توان با حل دستگاهی ازمعادلات خطی به‌دست آورد. یکی از آنها را که جوابی یکتا دارد عرضه می‌کنیم.

مثال ۱ مردی دارای یک پسر و یک دختر است. سن مرد چهار برابر سن پسر است و پسر چهارسال از دختر بزرگتر می‌باشد. سه سال دیگر سن مرد پنج برابر سن دخترمی‌شود. سن مرد، پسر، و دختر را بیابید.

فرض می‌کنیم سن مرد m، سن پسر s، وسن دختر d باشد. چون سن مرد چهار برابر سن پسر است، $m = ۴s$. چون پسر چهار سال از دختر بزرگتر است، $s = d + ۴$. سه سال دیگر سن مرد $m + ۳$ و سن دختر $d + ۳$ خواهد بود. لذا، $m+۳=۵(d+۳)$. پس از مرتب کردن، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} m - ۴s \quad\quad &= ۰ \\ s - \quad d &= ۴ \\ m \quad\quad - ۵d &= ۱۲ \end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم. معادلهٔ اول را ازمعادلهٔ سوم کم می‌کنیم. $\downarrow$

$$\begin{aligned} m \quad -۴s \qquad &= \quad ۰ \\ s - \quad d &= \quad ۴ \\ ۴s - ۵d &= \quad ۱۲ \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم را در ۴ — ضرب کرده، حاصل را به معادلهٔ سوم می‌افزاییم. $\downarrow$

$$\begin{aligned} m \quad -۴s \qquad &= \quad ۰ \\ s - \quad d &= \quad ۴ \\ - \quad d &= -۴ \end{aligned}$$

معادلهٔ سوم را از دومی کم می‌کنیم. $\downarrow$

$$\begin{aligned} m \quad -۴s \qquad &= \quad ۰ \\ s \qquad &= \quad ۸ \\ - \quad d &= -۴ \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم را در ۴ ضرب کرده، حاصل را به معادلهٔ اول می‌افزاییم. درنتیجه: $\downarrow$

$$\begin{aligned} m \qquad\qquad &= \quad ۳۲ \\ s \qquad &= \quad ۸ \\ - \quad d &= -۴ \end{aligned}$$

یا $m = ۳۲$، $s = ۸$، و $d = ۴$.

مثال بعدی چگونگی پیدایش یک دستگاه معادلات خطی در یک مسئلهٔ فیزیکی ساده را نشان می‌دهد.

مثال ۲ سه گوی فلزی و یک خطکش داده شده‌اند. می‌خواهیم جرم گوی ۱ و جرم گوی ۲ را بیابیم درحالی که می‌دانیم جرم گوی ۳ دو کیلوگرم است. مرکز مترچوبی روی یک نقطهٔ اتکا قرار گرفته است و گویها به‌وسیلهٔ نخ (که از وزنش صرف نظر می‌کنیم) از آن آویزان شده‌اند. برای اینکه خطکش در حالت تعادل باشد، گویها را در دو وضعیت می‌توان قرار داد.

در اولین وضعیت پایدار، گوی ۱ در ۴۰ سانتیمتری سمت چپ، گوی ۲ در ۱۵ سانتیمتری سمت چپ، و گوی ۳ در ۵۰ سانتیمتری سمت راست نقطهٔ اتکا قرار می‌گیرند. در وضعیت دوم، گوی ۱ در ۵۰ سانتیمتری سمت راست، گوی ۲ در ۲۵ سانتیمتری سمت چپ، وگوی ۳ در ۲۵سانتیمتری سمت‌راست نقطهٔ اتکا واقع می‌شوند. (ر.ک. شکل ۳.۱). جرم گوی ۱ و گوی ۲ را بیابید.

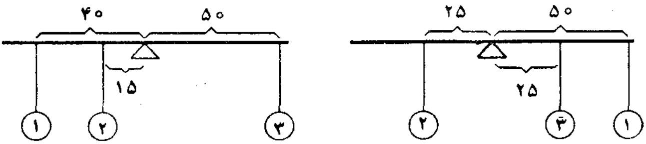
فرض می‌کنیم x و y، بترتیب اجرام گویهای ۱ و ۲ باشند. یک اصل بنیادی فیزیک می‌گوید که وقتی دستگاه درحال تعادل باشد، مجموع گشتاورها درسمت چپ نقطهٔ اتکا باید

با مجموع گشتاورها در سمت راست آن برابر باشد. گشتاور، مساوی حاصلضرب جرم جسم در فاصله‌اش تا نقطهٔ اتکا تعریف می‌شود. در اولین وضعیت تعادل، گشتاور گویهای ۱، ۲، و ۳ بترتیب عبارت است از $۴۰x$، $۱۵y$، و ۵۰×۲. لذا $۴۰x + ۱۵y = ۱۰۰$. در حالت دوم، گشتاورگویهای ۲، ۳، و ۱ بترتیب $۲۵y$، ۲×۲۵، و $۵۰x$ خواهد بود. پس $۲۵y = ۵۰ + ۵۰x$. درنتیجه دستگاه

$$
\begin{aligned}
۴۰x + ۱۵y &= ۱۰۰ \\
-۵۰x + ۲۵y &= ۵۰
\end{aligned}
$$

را به دست می‌آوریم.

چنانچه این دستگاه را مانند دستگاههای قبلی حل کنیم، در می‌یابیم که $x = ۱$ و $y = ۴$.



شکل ۳.۱

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات خطی دومجهولی زیر را در نظر بگیرید. برای هرزوج از معادلات معین کنید که آیا جواب وجود دارد و، اگر وجود دارد، این جواب چیست، و آن را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

(الف) $\begin{aligned} ۲x + y &= ۷ \\ x - ۳y &= ۲ \end{aligned}$ (ب) $\begin{aligned} x + y &= ۳ \\ ۳x + ۲y &= ۸ \end{aligned}$ (ج) $\begin{aligned} ۴x - ۳y &= ۸ \\ ۸x - ۶y &= ۲۴ \end{aligned}$

(د) $\begin{aligned} x - y &= ۸ \\ ۲x + ۸y &= ۶ \end{aligned}$ (ه) $\begin{aligned} x + ۲y &= ۳ \\ ۲x + ۴y &= ۶ \end{aligned}$ (و) $\begin{aligned} ۲x - ۶y &= ۷ \\ ۳x - ۹y &= ۴ \end{aligned}$

۲. دستگاه معادلات

$$ax + by = ۰ \qquad cx + dy = ۰$$

را که درآن a، b، c، و d اعداد حقیقی‌اند درنظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

(ب) اگر $ad - bc \neq ۰$، نشان دهید که دستگاه فقط یک جواب دارد. جواب خود را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

۳. دستگاههای زیر را حل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} x + y + z &= ۶ \\ ۳x - ۲y + ۳z &= ۳ \\ ۲x - y + z &= ۴ \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x - y + z &= ۰ \\ ۲x - y + z &= ۱ \\ ۳x + y - ۳z &= ۲ \end{aligned}$$

۴. درمجتمعی ازجانداران، یک صد جانور از نوع معینی وجود دارند. پنج سال بعد تعداد آنها به ۲۴۰ می‌رسد. درطی این پنج سال، عدهٔ نرها دوبرابر و عدهٔ ماده‌ها سه‌برابر می‌شود. در ابتدا چند نر وچند ماده در مجتمع بوده است؟

۵. کارخانه‌ای دارای دوماشین M و N است. M روزانه ۱۵ ساعت و N روزانه ۱۰ ساعت می‌تواند کار کند. کارخانه دومحصول تولید می‌کند، A و B. برای ساختن یک واحد از A، لازم است از هریک از M و N به‌مدت یک ساعت استفاده شود. برای تولید یک واحد از B، ماشین M نیم ساعت و ماشین N ربع ساعت باید کار کنند. چند واحد از A و B باید در روز تولید شود تا مطمئن باشیم که M و N درتمام مدتی که قابل استفاده بوده‌اند کار می‌کرده‌اند.

۶. عمومی‌ترین جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - y = ۰$، تابعی است به شکل $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$ جوابی را بیابید که برای آن، $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = ۰$.

۲ هم‌ارزی دستگاههای معادلات خطی

دربخش قبلی، برای حل چند دستگاه معادلات خطی، روش حذفی را به کار بردیم. اکنون می‌خواهیم ازاین مثالها استفاده کرده چند اصل و روش کلی برای بررسی دستگاههای معادلات خطی عرضه کنیم.

منظور از **معادلهٔ خطی** معادله‌ای به‌صورت $a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \cdots + a_nx_n = b$ است که در آن $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n و b مقادیر ثابت‌اند و $x_۱$، $x_۲$، . . .، x_n کمیتهایی هستند که باید معین شوند. x_iها را **مجهولهای** معادله می‌نامند. در این معادله a_i ضریب x_i نامیده می‌شود. **جواب** این معادله به‌صورت n تایی $(c_۱, c_۲, \ldots, c_n)$ از اعداد حقیقی است به‌طوری‌که $a_۱c_۱ + a_۲c_۲ + \cdots + a_nc_n = b$. برای‌مثال، $۳x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ - ۵x_۴ = ۱۲$ یک معادلهٔ خطی‌است. دراین‌معادله مجهولها $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، و $x_۴$ هستند. ضریب $x_۱$ عدد ۳ و ضریب $x_۲$ عدد ۱ — است و همین‌طور الی آخر. $(۰, ۰, ۰, ۴)$ و $(۰, ۲, ۷, ۰)$ جوابهایی ازاین معادله‌اند.

دستگاه معادلات خطی، گردآورده‌ای است ازچند معادلهٔ خطی. برای مثال،

$$\begin{aligned} ۴x_۱ + ۵x_۲ - ۳x_۳ &= ۱ \\ x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ &= ۰ \\ -x_۱ + ۴x_۲ - ۲x_۳ &= ۴ \end{aligned}$$

یک دستگاه معادلات خطی است.

منظوراز **جواب یک دستگاه معادلات خطی** n مجهولی، یک n تایی‌ازاعداد است

که در هریک ازمعادلات دستگاه صدق کند. مثلاً (۲ و ۰ و ۱ − و ۳) یک جواب دستگاه

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 10 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 10x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_4 &= 29 \end{aligned}$$

است.

فرض می‌کنیم دو دستگاه معادلات خطی n مجهولی داده شده باشند، گوییم این دو دستگاه **هم‌ارزند** اگر هر n تایی از اعداد که جواب یکی از این دستگاههاست، جواب دستگاه دیگر نیز باشد. به‌عبارت دیگر دو دستگاه هم‌ارزند اگردارای جوابهای یکسان باشند.

بنابراین تعریف، دستگاههای

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad \begin{aligned} 2x + 2y &= 8 \\ 4x + y &= 13 \end{aligned}$$

هم ارزند، زیرا در هر دومورد، جواب دستگاه (۱ و ۳) است.

واضح است که عوض‌کردن ترتیب‌معادلات دریک دستگاه، تغییری درجوابها نمی‌دهد و بنابراین، یک دستگاه معادلات هم‌ارز با دستگاه اولی ایجاد می‌کند. علاوه براین، دو اصل سادهٔ دیگر برای تبدیل یک دستگاه معادلات به دستگاه دیگری که هم ارز با آن باشد، وجود دارد.

(۱) اگر یک معادله از دستگاه معادلات خطی مفروضی را دریک عدد غیرصفر ضرب کنیم و بقیهٔ معادلات دستگاه را بدون تغییر گذاریم، دستگاه معادلات خطی دیگری حاصل می‌شود که با دستگاه اولی هم‌ارز است.

اثبات گیریم $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ معادله‌ای ازدستگاه اول باشد که در یک عدد غیرصفر c ضرب می‌شود. این معادله در دستگاه دوم عبارت است از:

$$ca_1x_1 + ca_2x_2 + \cdots + ca_nx_n = cb$$

اگر $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ یک جواب دستگاه اول باشد، داریم: $a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n = b$. بنابراین، $(ca_1)g_1 + (ca_2)g_2 + \cdots + (ca_n)g_n = cb$. چون بقیهٔ معادلات دو دستگاه یکسان‌اند، $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ یک جواب دستگاه دوم نیز هست. از طرف دیگر، فرض می‌کنیم $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ یک جواب دستگاه دوم باشد. در این صورت،

$$ca_1h_1 + ca_2h_2 + \cdots + ca_nh_n = cb$$

اگر این معادله را در c^{-1} ضرب کنیم، داریم : $a_1h_1 + a_2h_2 + \cdots + a_nh_n = b$. باز، همهٔ معادلات دیگر در دو دستگاه یکسان‌اند. بنابراین $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ یک جواب دستگاه اول نیز هست.

●

برای مثال، طبق این اصل، می‌بینیم که دستگاههای

$$\begin{aligned} x+5y-2z&=0 \\ 6x+9y+3z&=9 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x+5y-2z&=0 \\ 2x+3y+z&=3 \end{aligned}$$

هم ارزند. همین طور، با دوبار استفاده از (۱)، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} 2x+6y&=8 \\ x-4y&=-2 \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x+3y&=4 \\ -x+4y&=2 \end{aligned}$$

هم ارزند.

اصل دوم هم ارزی (درمورد دستگاههای معادلات خطی) چنین است:

(۲) اگر معادله‌ای از یک دستگاه معادلات خطی مفروض را به معادلهٔ دیگری ازاین دستگاه بیفزاییم و بقیهٔ معادلات‌را به همان‌صورت اولیه باقی‌گذاریم، دستگاه معادلات خطی‌دیگری حاصل می‌شودکه بادستگاه اول هم‌ارز است.

بنا بر اصل دوم، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ x+3y-2z&=0 \\ x+y+4z&=1 \end{aligned}$$

با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ 2x+4y-3z&=1 \\ x+y+4z&=1 \end{aligned}$$

هم ارز است؛ زیرا معادلهٔ دوم در دستگاه دوم، از افزودن معادلهٔ اول به معادلهٔ دوم در دستگاه اول حاصل شده است و بقیهٔ معادلات دو دستگاه یکسان‌اند.

اثبات گیریم $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ معادله‌ای از دستگاه اول‌باشد. فرض کنیم $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n=d$ آن معادله از دستگاه اول باشد که به معادلهٔ $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ افزوده می‌شود. به این ترتیب، به جای معادلهٔ $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$ از دستگاه اول، معادلهٔ

$$(a_1+c_1)x_1+(a_2+c_2)x_2+\dots+(a_n+c_n)x_n=b+d$$

قرار می‌گیرد و بقیهٔ معادلات بدون تغییر می‌مانند تا دستگاه دوم به دست آید. حال فرض می‌کنیم $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ یک جواب دستگاه اول باشد. پس، داریم :

$$a_{۱}g_{۱} + a_{۲}g_{۲} + \cdots + a_{n}g_{n} = b$$
$$c_{۱}g_{۱} + c_{۲}g_{۲} + \cdots + c_{n}g_{n} = d$$

بنابراین، $(a_{۱} + c_{۱})\, g_{۱} + (a_{۲} + c_{۲})\, g_{۲} + \cdots + (a_{n} + c_{n}) g_{n} = b + d$

چون همهٔ معادلات دیگر دستگاه اول و دستگاه دوم یکسان اند، نتیجه می‌شود که $(g_{۱}, g_{۲}, \ldots, g_{n})$ یک جواب دستگاه دوم نیز هست.

حال، فرض می‌کنیم $(h_{۱}, h_{۲}, \ldots, h_{n})$ یک جواب دستگاه دوم باشد. در این صورت،

$$(a_{۱} + c_{۱})\, h_{۱} + (a_{۲} + c_{۲})\, h_{۲} + \cdots + (a_{n} + c_{n})\, h_{n} = b + d$$
$$c_{۱}h_{۱} + c_{۲}h_{۲} + \cdots + c_{n}h_{n} = d$$

بنابراین، $a_{۱}h_{۱} + a_{۲}h_{۲} + \cdots + a_{n}h_{n} = b$. باز همهٔ معادلات دیگر دو دستگاه یکسان‌اند ولذا $(h_{۱}, h_{۲}, \ldots, h_{n})$ یک جواب دستگاه اول نیز می‌باشد. ●

با استفادهٔ مکرر از دو اصل فوق، می‌توان دستگاههای ساده‌تری از معادلات را به دست آورد.

تمرینات

۱. با استفاده از تعریف هم‌ارزی دستگاههای معادلات خطی، معین کنید که کدام زوج از دستگاههای زیر هم‌ارزند.

(الف) $\begin{array}{l} ۲x + y = ۱ \\ x - y = ۰ \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x + ۲y = ۵ \\ ۳x + y = ۵ \end{array}$ (ب) $\begin{array}{l} x + y = ۰ \\ x - ۲y = ۰ \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} ۳x + ۲y = ۰ \\ x - y = ۰ \end{array}$

(ج) $\begin{array}{l} x + y = ۰ \\ x - ۲y = ۰ \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} ۲x + ۲y = ۰ \\ ۳x + ۳y = ۰ \end{array}$ (د) $\begin{array}{l} ۲x + y = ۵ \\ x - y = -۲ \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} ۳x - y = ۰ \\ x + y = ۴ \end{array}$

(ه) $\begin{array}{l} x - y = ۲ \\ x + y = ۴ \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x + ۲y = ۸ \\ ۳x + y = ۴ \end{array}$ (و) $\begin{array}{l} x + ۲y = ۱ \\ ۳x + ۶y = ۰ \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x + y = ۵ \\ ۲x - y = ۱ \end{array}$

۲. دو دستگاه معادلات زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} + a_{۱۳}x_{۳} = b_{۱} & \qquad c_{۱۱}x_{۱} + c_{۱۲}x_{۲} + c_{۱۳}x_{۳} = ۰ \\ a_{۲۱}x_{۱} + a_{۲۲}x_{۲} + a_{۲۳}x_{۳} = b_{۲} & \qquad c_{۲۱}x_{۱} + c_{۲۲}x_{۲} + c_{۲۳}x_{۳} = ۰ \end{array}$$

اگر $b_{۱} \neq ۰$ یا $b_{۲} \neq ۰$، نشان دهید که این دو دستگاه هم‌ارز نیستند.

۳ روش حذفی گاوسی

فرض کنیم دستگاه زیر مرکب از m معادلهٔ خطی n مجهولی داده شده باشد.

$$\begin{array}{c} a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} + a_{۱۳}x_{۳} + \cdots + a_{۱n}x_{n} = b_{۱} \\ a_{۲۱}x_{۱} + a_{۲۲}x_{۲} + a_{۲۳}x_{۳} + \cdots + a_{۲n}x_{n} = b_{۲} \\ a_{۳۱}x_{۱} + a_{۳۲}x_{۲} + a_{۳۳}x_{۳} + \cdots + a_{۳n}x_{n} = b_{۳} \\ \vdots \\ a_{m۱}x_{۱} + a_{m۲}x_{۲} + a_{m۳}x_{۳} + \cdots + a_{mn}x_{n} = b_{m} \end{array}$$

که در این دستگاه m و n اعداد صحیح مثبت اند و a_{ij} و b_i ها مقادیر ثابت (به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, m$ و $j = ۱, ۲, \ldots, n$)، و x_j مجهول است (به‌ازای $j = ۱, ۲, \ldots, n$)، روش ساده کردن زیر را به کار می‌بریم.

(۱) مجهولی را که ضریب غیرصفری داشته باشد انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم x_s چنین مجهولی است وضریبش درمعادلهٔ tام، $a_{ts} \neq ۰$ می‌باشد. معادلهٔ tام را در $a_{ts}^{-۱}$ ضرب می‌کنیم.

(۲) به ازای هر $i \neq t$ و $i = ۱, ۲, \ldots, m$، $(-a_{is})$ برابر معادلهٔ tام را به معادلهٔ iام دستگاه حاصل از مرحلهٔ (۱)، می‌افزاییم. این کار، x_s را از تمام معادلات، بجز معادلهٔ tام، حذف می‌کند. x_s را مجهول به کار رفته و معادلهٔ tام را معادلهٔ به کار رفته می‌نامیم.

(۳) حال مجهول جدیدی مثل x_r را که دارای ضریب غیرصفری در یک معادلهٔ به کار نرفته است، انتخاب می‌کنیم، مراحل (۱) و (۲) را برای حذف x_r از همهٔ معادلات دیگر، از جمله معادلاتی که تا کنون به کار رفته‌اند، به کار می‌بریم.
باز، معادله‌ای را که در این مرحله مورد استفاده قرار دادیم، به کار‌رفته می‌نامیم. مرحلهٔ (۳) را آنقدر تکرار می‌کنیم تا دیگر هیچ معادلهٔ به کار نرفته‌ای باقی نماند، یا آنکه فقط معادلاتی به صورت $c = ۰$، به‌ازای یک عدد c، باقی بمانند.

اگر جوابهایی برای این دستگاه معادلات وجود داشته باشند، همگی ازاین روش به دست می‌آیند. اگر جوابی وجود نداشته باشد، با استفاده از همین روش، یک تناقض به دست می‌آید.

تذکر این نکته مهم است که بنا به اصول بخش قبلی، آخرین دستگاهی که حاصل می‌شود با دستگاه اصلی هم ارز است.

اکنون چند مثال برای روشن ساختن این روش می‌آوریم:

مثال ۱

$$\begin{aligned} x + y &= ۱ \\ ۶x - ۲z &= -۸ \\ ۳y - z &= -۳ \end{aligned}$$

گیریم y اولین مجهولی باشد که به‌کار می‌رود. معادلهٔ سوم را به عنوان معادلـه‌ای کـه باید به کار رود انتخاب کرده، آن را در ۱/۳ ضرب می‌کنیم.

$\downarrow$

$$\begin{aligned} x + y \quad\quad &= 1 \\ 6x \quad\quad - 2z &= -8 \\ y - \tfrac{1}{3}z &= -1 \end{aligned}$$

معادلهٔ سوم را در (۱ −) ضرب کرده، حاصل را به معادلهٔ اول می‌افزاییم. معادلهٔ سوم را در ۰ ضرب کرده، حاصل را به معادلهٔ دوم می‌افزاییم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x \quad\quad + \tfrac{1}{3}z &= 2 \\ 6x \quad\quad - 2z &= -8 \\ y - \tfrac{1}{3}z &= -1 \end{aligned}$$

معادلهٔ اول ومجهول z را به عنوان معادله و مجهولی که در این مرحله باید به‌کار روند، انتخاب می‌کنیم. معادلهٔ اول را در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} 3x \quad\quad + z &= 6 \\ 6x \quad\quad - 2z &= -8 \\ y - \tfrac{1}{3}z &= -1 \end{aligned}$$

دوبرابر معادلهٔ اول را به معادلهٔ دوم می‌افزاییم؛ ۱/۳ معادلهٔ اول را به معادله سوم می‌افزاییم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} 3x \quad\quad + z &= 6 \\ 12x \quad\quad &= 4 \\ x + y \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم و x را به عنوان معادله و مجهولی که باید به‌کار روند انتخاب کرده، معادلهٔ دوم را در ۱/۱۲ ضرب می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} 3x \quad\quad + z &= 6 \\ x \quad\quad &= \tfrac{1}{3} \\ x + y \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

(۳ −) برابر معادلهٔ دوم را به معادلهٔ اول می‌افزاییم؛ (۱ −) برابر معادلهٔ دوم را به معادلهٔ سوم می‌افزاییم.

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
z &= ۵\\
x \quad &= \frac{۱}{۳}\\
y \quad &= \frac{۲}{۳}
\end{aligned}
$$

پس، دراین حالت جوابی یکتا به دست می‌آید.

مثال ۲

$$
\begin{aligned}
۲x + ۴y &= ۳\\
۳x + ۶y &= ۱
\end{aligned}
$$

مجهول x و معادلهٔ اول را به عنوان اولین مجهول و اولین معادله‌ای که باید به کار روند انتخاب می‌کنیم.
معادلهٔ اول را در ۱/۲ ضرب می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$
\begin{aligned}
x + ۲y &= \frac{۳}{۲}\\
۳x + ۶y &= ۱
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

(۳ −) برابر معادلهٔ اول را به معادلهٔ دوم می‌افزاییم.

$$
\begin{aligned}
x + ۲y &= \frac{۳}{۲}\\
۰ &= -\frac{۷}{۲}
\end{aligned}
$$

معادلهٔ دوم این‌دستگاه، البته نامعقول‌است؛ این معادله، به‌شکل دقیقتر، باید به‌صورت $۰.x + ۰.y = -۷/۲$ نوشته می‌شد، و این معادله هیچ جوابی ندارد. حال ببینیم مفهوم این‌عبارت چیست. تعریف هم ارزی دو دستگاه معادلات خطی را دوباره به یاد آورید: دو دستگاه هم ارزند اگر دارای جوابهای یکسان باشند. دراین مثال، آخرین دستگاهی که به دست آورده‌ایم جواب ندارد. در نتیجه، دستگاه اول جواب ندارد. همان‌طور که در بخش اول عمل‌کردیم می‌توان تحقیق‌کرد که این معادلات، معرف خطوط موازی متمایزی درصفحه هستند ولذا، این خطوط نقطهٔ مشترکی ندارند.

مثال ۳

$$
\begin{aligned}
x_۱ \qquad\quad - x_۳ + ۲x_۴ &= ۰\\
۲x_۱ - ۳x_۲ \qquad\quad - ۴x_۴ &= ۰\\
x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ &= ۰\\
۳x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ &= ۰
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

مجهول $x_۱$ ومعادلهٔ اول را به کار می‌بریم.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & - x_3 & + 2x_4 & = 0 \\ & -3x_2 & + 2x_3 & - 8x_4 & = 0 \\ & x_2 & + 2x_3 & + 3x_4 & = 0 \\ & -2x_2 & + 4x_3 & - 5x_4 & = 0 \end{array}$$

$$\downarrow$$

مجهول x_2 ومعادلهٔ سوم را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & - x_3 & + 2x_4 & = 0 \\ & & 8x_3 & + x_4 & = 0 \\ & x_2 & + 2x_3 & + 3x_4 & = 0 \\ & & 8x_3 & + x_4 & = 0 \end{array}$$

$$\downarrow$$

مجهول x_4 و معادلهٔ دوم را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & - 17x_3 & & = 0 \\ & & 8x_3 & + x_4 & = 0 \\ & x_2 & - 22x_3 & & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array}$$

چون تنها مجهول به‌کار نرفته، x_3، در معادلهٔ به‌کار نرفته، دارای ضریب صفر است، عمل را نمی‌توان بیشتر ادامه داد. از دستگاه معادلات فوق می‌بینیم که اگرمقدار دلخواهی برای x_3، مثلاً $x_3 = c$، انتخاب کنیم و سپس قرار دهیم

$$\begin{aligned} x_1 &= 17x_3 = 17c \\ x_4 &= -\ 8x_3 = -\ 8c \\ x_2 &= 22x_3 = 22c \end{aligned}$$

یک جواب برای دستگاه فوق به‌دست آورده‌ایم و هرجواب دستگاه (به ازای یک مقدار c) ازهمین نوع‌است. به‌عبارت دیگر، عمومیترین جواب، ۴ تایی $(17c, 22c, c, -8c)$ است. چون c هرعدد حقیقی می‌تواند باشد، بینهایت جواب برای این دستگاه وجود دارد.

حال که سه مثال از روش حذفی دیده‌ایم، شاید بجا باشد که ویژگی نتایج حاصل ازاین مثالها را مورد بحث قرار دهیم.

درمثال اول، معادلات سازگار بودند و جواب دقیقاً معین می‌شد. درمثال دوم، جوابی وجود نداشت؛ دراین موارد گوییم که دستگاه ناسازگار یا «زیاد مقید» است. درمثال سوم، بینهایت جواب وجود داشت. دراین حالت دستگاه سازگار ولی «کم مقید» است.

حالت اول، احتمالاً آشناترین حالت است. در یک مسئلهٔ واقعی، این حالت وقتی پیش می‌آید که مسئله خوش طرح باشد و مفروضات کافی برای تعیین جواب وجود داشته باشد. درمثالهای ۱ و ۲، ازبخش قبلی، با این گونه مسائل مواجه بودیم. در هردوی این مسائل، داده‌ها سازگار، وبرای حل مسئله کافی بودند.

ساختن دستگاههای ناسازگار نیزآسان است: دستگاهی ازمعادلات را که فقط یک

جواب داشته باشد، درنظر می‌گیریم. معادلهٔ دیگری انتخاب می‌کنیم کـه این جواب در آن صدق نکند و این معادله را به دستگاه اضافه می‌کنیم. بـرای مثال، بـا اضافه کـردن معادلهٔ $\text{۸} = z - \text{۶}y + \text{۳}x$ به دستگاه سه معادلهٔ مثال ۱، دستگاه بزرگتری می‌سازیم. چـون $x = \text{۱/۳}$ و $y = \text{۲/۳}$ و $z = \text{۵}$ جواب این معادله نیست، این دستگاه جدید ناسازگار است.

در عمل، به دلایل زیادی معادلات ناسازگار به وجـود می‌آیند. اشتباه در فرمولبندی ریاضی یک مسئله ممکن است ناسازگاری ایجاد کند. لکن، بعضی مسائل را به این ترتیب می‌توان حل کرد که نشان دهیم دستگاه مربوطه ناسازگار است. نمونه‌ای از این نوع مسئله را ارائه می‌دهیم.

مثال ۴ آیا نقاط $P_\text{۱} = (\text{۱}, \text{۰})$، $P_\text{۲} = (\text{۱}, \text{۱})$، $P_\text{۳} = (\text{۰}, \text{۲})$ و $P_\text{۴} = (-\text{۱}, \text{۳})$ روی یک دایره قرار دارند؟

برای حل این مسئله، یادآوری می‌کنیم که معادلهٔ دایره به صورت

$$x^\text{۲} + y^\text{۲} + Ax + By + C = \text{۰}$$

است. سعی می‌کنیم A، B، و C را طوری انتخاب کنیم که چهار نقطهٔ مفروض روی این دایره قرارگیرند. اگر مختصات این چهار نقطه را درمعادلهٔ دایـره قـرار دهیم، چهار معادله برای A، B، و C به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
A \qquad\;\; + C &= -\text{۱}\\
A + B + C &= -\text{۲}\\
\text{۲}B + C &= -\text{۴}\\
-A + \text{۳}B + C &= -\text{۱۰}
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

مجهول A و معادلهٔ اول را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned}
A \qquad + C &= -\text{۱}\\
B + \qquad &= -\text{۱}\\
\text{۲}B + C &= -\text{۴}\\
\text{۳}B + \text{۲}C &= -\text{۱۱}
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

مجهول B و معادلهٔ دوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned}
A \qquad + C &= -\text{۱}\\
B \qquad &= -\text{۱}\\
C &= -\text{۲}\\
\text{۲}C &= -\text{۸}
\end{aligned}$$

می‌توانستیم این عمل را همچنان ادامه دهیم ولی هم اکنون از دومعادلهٔ اخیر به این تناقض رسیده‌ایم کـه $C = -\text{۲}$ و $C = -\text{۴}$. لـذا، دستگاه معادلات ناسازگار است؛ یعنی نمی‌توانیم A، B، و C را طـوری انتخاب کنیم کـه چهـار نقطهٔ مفروض در معـادلـهٔ

$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$ صدق کنند. به عبارت دیگر، این چهار نقطه روی یک دایره قرار ندارند.

اگر نقاط P_iی این مثال را طوری تغییر دهیم که همگی روی یک دایره قرارگیرند، به جای رسیدن به تناقض، A، B، و C ومعادلهٔ دایره را خواهیم یافت.

دستگاههای ناسازگار از وجود تناقض در دادهها، و دستگاههای دارای بینهایت جواب از کمبود دادهها ناشی میشوند. گرچه، وقتی جواب دستگاهی از معادلات یکتا نباشد، این جواب ممکن است قانع کننده به نظر نرسد، معهذا مسائلی وجود دارند که در آنها چنین جوابی همهٔ اطلاعات خواسته شده را ارائه میدهد. دراین مورد مثالی از شیمی میآوریم.

مثال ۵ معادلهٔ شیمیایی زیر را موازنه میکنیم:

$$\mathrm{Ca} + \mathrm{H_۳PO_۴} \rightarrow \mathrm{Ca_۳P_۲O_۸} + \mathrm{H_۲}$$

دراینجا، مسئله عبارت است ازیافتن اعداد صحیح h، i، j، و k، بهطوری که در معادلهٔ

$$h\,\mathrm{Ca} + i\,\mathrm{H_۳PO_۴} \rightarrow j\,\mathrm{Ca_۳P_۲O_۸} + k\,\mathrm{H_۲}$$

تعداد اتمهای هرعنصر درسمت راست مساوی با تعداد اتمهای همان عنصر درسمت چپ باشد. درسمت چپ معادله، h اتم کلسیم و درسمت راستآن $۳j$ اتم کلسیم وجود دارند. لذا، $h = ۳j$. در مورد ئیدروژن، $۳i = ۲k$. درمورد فسفر $i = ۲j$. و بالاخره، درمورد اکسیژن $۴i = ۸j$. درنتیجه، داریم:

$$\begin{aligned}
h \quad - ۳j \qquad &= ۰\\
۳i \qquad\quad - ۲k &= ۰\\
i - ۲j \qquad &= ۰\\
۴i - ۸j \qquad &= ۰
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

معادلهٔ سوم و مجهول i را بهکار میبریم.

$$\begin{aligned}
h \quad - ۳j \qquad &= ۰\\
۶j - ۲k &= ۰\\
i - ۲j \qquad &= ۰\\
۰ &= ۰
\end{aligned}$$

اکنون واضح است که اگر j دلخواه باشد، $(۳j, j, ۲j, ۳j)$ جواب دستگاه است. معمولاً j را مساوی یک اختیار میکنیم وبقیه را برحسب آن حساب میکنیم. ولی اگر j را برابر ۲ بگیریم و بقیهٔ اعداد را از قاعدهٔ فوق بدست آوریم، بازهم موازنهٔ معادله برقرار خواهد بود.

مثال ۶

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

مجهول x_1 ومعادلهٔ سوم را به کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_2 \quad\quad + x_4 &= 0 \\ -x_2 \quad\quad - x_4 &= 0 \\ x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

مجهول x_2 ومعادلهٔ اول را به کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_2 \quad\quad + x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

چون هردو مجهول به کار نرفتهٔ x_3 و x_4 در تنها معادلهٔ به کار نرفته، ضریب صفر دارند، نمی‌توانیم این عمل‌را ادامه دهیم. درنتیجه، اگر x_3 و x_4 را به طور دلخواه انتخاب کنیم، یعنی $x_3 = c$ و $x_4 = d$ و اگر بنویسیم

$$\begin{aligned} x_2 &= \quad - x_4 = \quad - d \\ x_1 &= 1 - x_3 = 1 - c \end{aligned}$$

آنگاه $(1 - c, -d, c, d)$ یک جواب دستگاه است. پس، در این حالت، یک «خانوادهٔ دو پارامتری» از جوابها به دست می‌آوریم. بعداً خواهیم دید که این مطلب را چگونه به صورت دقیقتری بیان می‌کنند.

مثال ۷ می‌خواهیم با استفاده از روش حذفی، مقادیر a، b، و c ای را بیابیم که به ازای آنها دستگاه

$$\begin{aligned} 2x - \ \ y + \ \ z &= a \\ x + 2y + \ \ z &= b \\ 3x + \ \ y + 2z &= c \end{aligned}$$

جواب داشته باشد. مجهول x ومعادلهٔ دوم را به کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} -5y - \ \ z &= a - 2b \\ x + 2y + \ \ z &= b \\ -5y - \ \ z &= c - 3b \end{aligned}$$

مجهول z و معادلهٔ اول را به کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$-5y - \ \ z = a - 2b$$

$$\begin{aligned} x - ۳y \qquad &= a - b \\ ۰ &= c - a - b \end{aligned}$$

در اینجا فرایند حذف به پایان می‌رسد زیرا در معادلهٔ به کار نرفته (معادلهٔ سوم) همهٔ مجهولها ضریب صفر دارند. ازمعادلهٔ سوم نتیجه می‌شود برای اینکه جوابی وجود داشته باشد، باید داشته باشیم $c = a + b$.

اگر فرض کنیم که این شرط برقرار است و y را به‌طور دلخواه انتخاب کنیم و فرض‌کنیم $x = ۳y + (a - b)$ و $z = -۵y - a + ۲b$، آنگاه یک جواب برای دستگاه سوم داریم‌که به علت هم‌ارز بودن دستگاهها، جوابی برای دستگاه اول نیزمی‌باشد.

پس، شرط لازم و کافی برای اینکه دستگاه اول دارای جواب باشد آن است که $c = a + b$.

قبل از اتمام این بخش، متذکر می‌شویم که، درحالت کلی، ارتباطی بین سازگاری یک دستگاه معادلات و تعداد معادلات و مجهولات آن دستگاه وجود ندارد. برای مثال، کاملاً امکان دارد که دستگاهی از دو معادله و ده مجهول وجود داشته باشد که ناسازگار باشد، همین‌طور ممکن‌است دستگاهی از ده معادلهٔ دومجهولی داشته باشیم که سازگار باشد. دراینجا مثالی از یک نوع مسئله که اغلب درعلوم رفتاری پیش می‌آید، عرضه می‌کنیم. در این دستگاه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است.

مثال ۸ در کشوری دو حزب سیاسی وجود دارد: D و R. هرشخصی عضو یکی از این احزاب است و هرسال یک دوره انتخابات انجام می‌گیرد. درطی یک سال، ۴/۵ اعضاء حزب D دراین حزب باقی می‌مانند ولی ۱/۵ آنها به عضویت R در می‌آیند؛ همچنین ۳/۵ از اعضاء حزب R در R می‌مانند و ۲/۵ بقیه عضو D می‌شوند.

علی‌رغم تمامی تغییر عضویتها، هر سال در موقع رأی‌گیری، نسبت اعضای D و نیز نسبت اعضای R، به کل‌جمعیت، ثابت می‌مانند. چه‌نسبت از رأی‌دهندگان متعلق به D هستند؟

برای حل این مسئله، گیریم x نسبت اعضای D به کل جمعیت، و y همین نسبت در مورد R باشد (برای مثال، $x = ۵/۹$ اگر ۵/۹ مردم عضو D باشند). چون همه مردم عضو D یا عضو R هستند، داریم: $x + y = ۱$

با در نظر گرفتن دو عامل زیر، وضع عضویت در D را در یک سال بعد محاسبه می‌کنیم: (۱) ۴/۵ اعضای D در این حزب باقی می‌مانند، (۲) ۲/۵ اعضای R جذب D می‌شوند.

پس، ۴/۵ از اعضای حزب D دراین حزب می‌مانند و اعضای آن x قسمت از کل جمعیت را تشکیل می‌دهند. ازاین قرار، نسبت افراد باقیمانده در D، به‌کل جمعیت $x\ (۴/۵)$ است. همچنین، ۲/۵ اعضای R جذب D می‌شوند و نسبت اعضای R به‌کل جمعیت y می‌باشد. پس نسبت افراد جذب شده در D، به‌کل جمعیت $y\ (۲/۵)$ است. در نتیجه یک سال بعد، نسبت همهٔ اعضای D به‌کل جمعیت $y\ (۲/۵) + x\ (۴/۵)$ خواهد بود. ازآنجا که نسبت اعضای D درسال قبل نیز همین بوده است، داریم

$$x = \left(\frac{۴}{۵}\right)x + \left(\frac{۲}{۵}\right)y \quad \text{یا} \quad -\left(\frac{۱}{۵}\right)x + \left(\frac{۲}{۵}\right)y = ۰ .$$

همین استدلال برای R نتیجه می‌دهد که $y = (۳/۵)y + (۱/۵)x$ یا $(۱/۵)x - (۲/۵)y = ۰$. درنتیجه، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x + \quad y &= ۱ \\ -\left(\frac{۱}{۵}\right)x + \left(\frac{۲}{۵}\right)y &= ۰ \\ \left(\frac{۱}{۵}\right)x - \left(\frac{۲}{۵}\right)y &= ۰ \end{aligned}$$

را به دست می‌آوریم. پس از حل دستگاه، به روش معمول، درمی‌یابیم که $x = ۲/۳$ و $y = ۱/۳$.

برای سادگی، دراین مسئله فرض کردیم که فقط دوحزب وجود دارد. درنتیجه دومعادلهٔ آخر تقریباً یکسان بودند. لکن، اگر این نوع مسئله درحالت سه حزبی بررسی می‌شد، چهارمعادله می‌داشتیم. درحالت کلی این چهار معادله کاملاً متفاوت‌اند (ر.ک. تمرین ۱۴.)

درقسمتهای بعد، بامسائل دیگری ازاین نوع روبرو خواهیم شد و روشهای کاراتری برای فرمولبندی آنها ارائه خواهیم نمود.

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات خطی زیر را حل کنید. در هر مورد، با انجام محاسبات لازم مشخص کنید که دستگاه جواب دارد یا نه، و اگر تعداد زیادی جواب دارد، صورت کلی جوابها را ارائه دهید.

(الف)
$$\begin{aligned} x - y + z &= ۵ \\ ۲x + y - z &= -۲ \\ ۳x - y - z &= -۷ \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ &= -۵ \\ ۳x_۱ + ۴x_۲ + ۱۵x_۳ &= ۲ \\ ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۱ \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} x + ۳y + z &= ۲ \\ ۳x + ۴y - z &= ۱ \\ x - ۲y - ۳z &= ۱ \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} ۲x - ۳y + ۴z &= ۳ \\ x - y + z &= ۱ \\ x - ۲y + ۳z &= ۲ \end{aligned}$$

(هـ)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ - ۲x_۴ &= ۱ \\ ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ x_۱ - x_۲ - ۲x_۳ + ۳x_۴ &= ۱ \end{aligned}$$

(و)
$$\begin{aligned} x - y + z &= ۹ \\ ۲x + y - ۳z &= ۰ \\ x + ۴y + z &= ۴ \\ ۳x + y - ۵z &= -۱ \end{aligned}$$

(ز)
$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ x_۱ - x_۲ + x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ ۴x_۱ - x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

(ح)
$$\begin{aligned} -x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۴ \\ x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۲ \\ x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۰ \end{aligned}$$

۲. اگر a، b، و c مقادیر دلخواهی باشند، دستگاههای زیر را حل کنید:

(الف)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= a \\ x_1 \qquad + x_3 &= b \\ x_1 + x_2 \qquad &= c \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= a \\ x + 3y &= b \end{aligned}$$

۳. با حل دستگاه معادلات زیر، x و y را به صورت توابعی از t بیابید.

$$\begin{aligned} (1-t)x + \qquad ty &= 0 \\ -tx + (1+t)y &= 1 \end{aligned}$$

۴. برای هریک از دستگاههای معادلات زیر، یک شرط لازم و کافی برای a، b، و c بیابید تا دستگاه دارای جواب باشد.

(الف)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= a \\ x - 2y + \ z &= b \\ x - 9y + 5z &= c \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= a \\ 2x - 2y + 3z &= b \\ x - 6y + 5z &= c \end{aligned}$$

۵. فرض کنید A، B، C، و D اعداد حقیقی دلخواهی باشند. ثابت کنید که یک چندجمله‌ای f، حداکثر از درجهٔ ۳، وجود دارد به طوری که $f(0) = A$، $f'(0) = B$، $f(1) = C$ و $f'(1) = D$ (دراینجا $f'(a)$ نمایشگر مشتق f درنقطهٔ a می باشد).

۶. خانواده‌ای متشکل از مادر، پدر، یک دختر، ویک پسر است. پدر دوسال از مادر بزرگتر است. دوسال دیگر سن پدر سه‌برابر سن پسرمی‌شود و سن پسر دوبرابر سن دختر. سه سال دیگر سن مادر پنج برابر سن دختر می‌شود. سن هریک از اعضای این خانواده را بیابید.

۷. سه فنجان روی یک میز قرار دارند وتعداد معینی سکهٔ یک ریالی درهرفنجان می باشد. تعداد سکه‌های موجود در هر زوج از فنجانها را می‌دانیم. آیا می‌توانید بگویید که در هر فنجان چند یک ریالی موجود است؟

۸. بافرض اینکه می‌دانیم صفردرجه سانتیگراد مساوی‌است با ۳۲ درجه‌فارنهایت، و ۱۰۰ درجه سانتیگراد برابر است با ۲۱۲ درجه فارنهایت، فرمولی برای تبدیل درجه حرارت از سانتیگراد به فارنهایت به دست‌آورید. (عقل‌سلیم حکم می‌کند که‌این معادله خطی است.)

۹. چهار وزنه و یک خطکش داده شده‌اند. مرکز خطکش روی یک نقطهٔ اتکا قرار دارد و وزنه‌ها از خطکش آویزان شده‌اند. سه وضعیت تعادل، به صورتی که درجدول زیر توصیف شده‌اند، مشاهده کرده‌ایم.

	وزنهٔ اول	وزنهٔ دوم	وزنهٔ سوم	وزنهٔ چهارم
وضعیت ۱	۵۰ (چپ)	۲۰ (چپ)	۱۰ (راست)	۳۰ (راست)
وضعیت ۲	۲۵ (چپ)	۵۰ (چپ)	۵۰ (راست)	۳۰ (راست)
وضعیت ۳	۲۰ (چپ)	۳۰ (چپ)	۳۰ (راست)	۲۰ (راست)

سه تا از وزنه‌ها را برحسب وزنهٔ چهارم بیابید.

۱۰. آیا نقاط (۹ ,۲) و (۱۲ ,۰) و (۱۸ ,۴−) روی یک دایره قرار دارند؟

۱۱. معادلهٔ شیمیایی زیر را موازنه کنید:

$$KMnO_۴ + H_۲SO_۴ + KBr \rightarrow K_۲SO_۴ + Br_۲ + MnSO_۴ + H_۲O$$

۱۲. چهار عنصر شیمیایی A، B، C، و D داده شده‌اند. همچنین می‌دانیم که ترکیبات شیمیایی ABC، $ABD_۲$، و $A_۳C$ وجود دارند. دربارهٔ ظرفیت این عناصر شیمیایی، چه می‌توان گفت؟

۱۳. یک‌شرکت حمل ونقل سه‌نوع کامیون دراختیاردارد: ۱، ۲، و ۳. این شرکت قرارداد بسته است که سه نوع محمولهٔ L، M، و N را جا به‌جا کند. جدول زیر نشان می‌دهد که هر کامیون چند واحد از هرنوع محموله را می‌تواند حمل کند.

محموله	کامیون ۱	۲	۳
L	۲	۱	۵
M	۴	۲	۳
N	۳	۱	۱

برای مثال، یک کامیون ازنوع ۲ می‌تواند یک‌واحد از L، دو واحد از M، ویک واحد از N را حمل کند. فرض کنید سفارش حمل بیست واحد از L، بیست وشش واحد از M، و پانزده واحد از N داده شده است. چند کامیون از هر نوع باید داشته باشیم تا همگی دارای بار کامل باشند؟

۱۴. مثال ۸ را گسترش داده، فرض‌کنید سه‌حزب A، B، و C وجود دارند. همچنین فرض کنید در هرسال، ۷/۱۰ از اعضای A در این حزب باقی می‌مانند، ۲/۱۰ از اعضای A عضو B می‌شوند و ۱/۱۰ بقیه به C می‌پیوندند. همین‌طور ۶/۱۰ از اعضای B در این حزب مانده، ۳/۱۰ به A و ۱/۱۰ به C ملحق می‌شوند. و نیز ۷/۱۰ از اعضای C در C می‌مانند، ۲/۱۰ به‌عضویت A و ۱/۱۰ بقیه به‌عضویت B درمی‌آیند. فرض‌کنید نسبت اعضای A، B، و C به‌کل جمعیت بترتیب x، y، و z باشد. همانند مثال ۸، فرض کنید نسبت رأی دهندگان به هرحزب، ازسالی به سال دیگر ثابت بماند.

(الف) نشان دهید که $x + y + z = ۱$

(ب) با بررسی اعضاء A، نشان دهید که $\left(\frac{۷}{۱۰}\right)x + \left(\frac{۳}{۱۰}\right)y + \left(\frac{۲}{۱۰}\right)z = x$

(ج) با بررسی اعضاء B، نشان دهید که $\left(\frac{۲}{۱۰}\right)x + \left(\frac{۶}{۱۰}\right)y + \left(\frac{۱}{۱۰}\right)z = y$.

(د) با بررسی اعضاء C، نشان دهید که $\left(\frac{1}{10}\right)x + \left(\frac{1}{10}\right)y + \left(\frac{7}{10}\right)z = z$

(ه) x، y، و z را بیابید.

۴ دستگاههای همگن

دستگاه معادلاتی به صورت

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

را دستگاه **همگن** گوییم. به عبارت دیگر، دستگاه همگن است اگر تمام مقادیر طرف راست معادلات آن صفر باشند.

هردستگاه معادلات همگن همیشه دارای حداقل یک جواب $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، ...، $x_n = 0$ است. این جواب را اغلب جواب **بدیهی** می‌نامند. هرجواب دیگر، **غیربدیهی** خوانده می‌شود.

حالتی وجود دارد که درآن می‌توان تضمین‌کرد که یک دستگاه همگن دارای جواب غیربدیهی است. در دستگاه معادلات فوق فرض می‌کنیم $n > m$، یعنی تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات باشد. دراین حالت قضیهٔ مهم زیر را داریم:

قضیه دریک دستگاه معادلات خطی همگن، اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد، یک جواب غیربدیهی وجود دارد.

اثبات دستگاه

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم که درآن $n > m$.

اگر همهٔ ضرایب x_1 دراین دستگاه صفر باشند، یعنی، اگر

$a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{m1} = 0$، آنگاه $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$

یک‌جواب غیربدیهی است. لذا فرض می‌کنیم یک ضریب x_1 صفر نباشد. با شماره‌گذاری

مجدد معادلات دستگاه، می‌توانیم فرض کنیم $a_{11} \neq 0$. معادلهٔ اول را در a_{11}^{-1} ضرب کرده، x_1 را از بقیهٔ معادلات حذف می‌کنیم، داریم

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n &= 0 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \cdots + b_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

اگر ضرایب x_2 در تمام معادلات بجز در معادلهٔ اول صفر باشند، یعنی، اگر $b_{22} = b_{32} = \cdots = b_{m2} = 0$، می‌نویسیم $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ و $x_1 = -b_{12}$ و $x_2 = 1$، و به‌این ترتیب یک جواب غیربدیهی پیدا می‌کنیم.

حال، پس از شماره گذاری مجدد معادلات، فرض می‌کنیم $b_{22} \neq 0$. معادلهٔ دوم را در b_{22}^{-1} ضرب می‌کنیم و x_2 را از بقیهٔ معادلات حذف می‌نماییم، داریم:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= 0 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ c_{m3}x_3 + \cdots + c_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

با ادامهٔ این فرایند و با استفاده ازاین فرض‌که تعداد مجهولات بیشتر ازتعداد معادلات‌است، بالاخره دستگاهی به صورت

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + d_{1r}\ x_r + \cdots + d_{1n}\ x_n &= 0 \\ x_2 \qquad + d_{2r}\ x_r + \cdots + d_{2n}\ x_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_{r-1} + d_{r-1\,r}x_r + \cdots + d_{r-1\,n}x_n &= 0 \\ 0 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

به دست می‌آوریم که در آن $r < n$. با انتخاب $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$ ، $x_r = 1$ و $x_1 = -d_{1r}$ ، $x_{r-1} = -d_{r-1\,r}$ ، $x_2 = -d_{2r}, \ldots,$ یک جواب غیربدیهی برای دستگاه به دست می‌آید. ●

برای روشن ساختن اثبات فوق چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$-x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

معادلهٔ اول و مجهول x_1 را به کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -10x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم را در $-1/10$ ضرب می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= 0 \\ 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم و مجهول x_2 را به کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{2}{5}x_4 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= 0 \\ 2x_3 + \tfrac{7}{5}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

معادلهٔ سوم را در $1/2$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{2}{5}x_4 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{7}{10}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

معادلهٔ سوم و x_3 را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \tfrac{1}{20}x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad + \tfrac{11}{20}x_4 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{7}{10}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

لذا، اگر $c = x_4$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد،

$$(-1/20c\ ,\ -11/20c\ ,\ -7/10c\ ,\ c)$$

جواب دستگاه است. اگر $c \neq 0$، جواب غیر بدیهی است.

مثال ۲

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ معادلهٔ اول را در ۱/۲ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x - y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ معادلهٔ اول و مجهول x را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x - y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ 2y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ معادلهٔ دوم را در ۱/۲ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x - y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ y + \tfrac{1}{4}z &= 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ معادلهٔ دوم و مجهول y را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{3}{4}z &= 0 \\ y + \tfrac{1}{4}z &= 0 \end{aligned}$$

با انتخاب $z = c \neq 0$، $x = -(3/4)c$، و $y = -(1/4)c$، یک جواب غیر بدیهی داریم.

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات زیر را حل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ -x + 4y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

۲. فرض کنید یک دستگاه معادلات همگن n مجهولی داشته باشیم که $(h_۱, h_۲, \ldots, h_n)$ یک جواب و $(g_۱, g_۲, \ldots, g_n)$ جوابی دیگر ازاین دستگاه باشند. نشان دهید که $(h_۱ + g_۱, h_۲ + g_۲, \ldots, h_n + g_n)$ و $(ch_۱, ch_۲, \ldots, ch_n)$ نیز جواب همین دستگاه معادلات هستند.

۳. فرض کنید $(h_۱, h_۲, \ldots, h_n)$ یک جواب دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ + \cdots + a_{۱n}x_n &= b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ + \cdots + a_{۲n}x_n &= b_۲ \\ &\vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + a_{m۳}x_۳ + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (۱)$$

باشد و $(g_۱, g_۲, \ldots, g_n)$ جوابی برای همین دستگاه وقتی که $(b_۱, b_۲, \ldots, b_m)$ را با $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ جایگزین کنیم. نشان دهید که $(h_۱ + g_۱, h_۲ + g_۲, \ldots, h_n + g_n)$ جوابی برای دستگاه (۱) است.

۴. یک دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی مفروض است. فرض کنید که n بزرگتر از m و دستگاه دارای جواب باشد. نشان دهید که جواب یکتا نیست.

۵. فرض کنید $(x_۱, y_۱)$، ...، $(x_۵, y_۵)$ پنج نقطه در صفحه باشند. نشان دهید که این نقاط روی یک مقطع مخروطی واقع‌اند، یعنی یک منحنی با معادلهٔ

$$Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰،$$

که درآن حداقل یکی از ضرایب A، B، C، D و E صفر نیست.

۲

بردارها و ماتریسها

۱ بردارها

بسیاری از کمیتهای فیزیکی مانند حرارت، جرم، و انرژی را می‌توان برحسب تنها یک عدد حقیقی r ویک واحد توصیف کرد. همان طور که درمطالعهٔ دستگاههای معادلات خطی، اغلب لازم می‌دیدیم که n تاییهای اعداد را درنظر گیریم، برای سایر توصیفات فیزیکی دقیق مانند مکان یاسرعت یک جسم درفضا نیز لازم‌است که ازچند عدد حقیقی استفاده کنیم. ازاین رو، دراین بخش می‌خواهیم n تاییهای اعداد و روشهای محاسبه با آنها را با تفصیل بیشتری مطالعه کنیم.

n-**بردار ستونی** را به عنوان یک n تایی از اعداد تعریف‌می‌کنیم که به طورعمودی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

اگر u_i ها اعداد حقیقی باشند ، یک n-بردار ستونی حقیقی، و اگر مختلط باشند، یک n-بردار ستونی مختلط داریم. عدد u_i را که در محل i ام قرار دارد مؤلفهٔ i ام بردار گویند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۵ \\ -۶ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱۴ \\ ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱+i \\ ۰ \\ ۱-i \end{bmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند. اولی یک ۲-بردار ستونی حقیقی؛ دومی یک ۴-بردار ستونی

حقیقی؛ و چهارمی یک ۳-بردار ستونی مختلط است. در بردار دوم، اولین مؤلفه ۳، مؤلفهٔ دوم ۰، مؤلفهٔ سوم ۵، و مؤلفهٔ چهارم ۶− می‌باشد.

با روشی مشابه، n-**بردار سطری** را به‌عنوان یک n تایی از اعداد تعریف می‌کنیم که به‌طور افقی به صورت $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ نوشته می‌شود. لذا $[3, 4, 1-, 5]$ یک ۴-بردار سطری است.

مجموعهٔ تمام n-بردارهای ستونی حقیقی را $\mathbf{R}^n$ می‌نامیم. با این تعریف، $\mathbf{R}^2$ متشکل از تمام بردارهای ستونی به صورت $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ است، که درآن a و b اعداد حقیقی اند.

مجموعهٔ تمام n-بردارهای ستونی مختلط را با $\mathbf{C}^n$ نشان می‌دهیم.

اگر $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ دو n-بردار ستونی باشند، گوییم $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ اگر و فقط اگر $\alpha_1 = \beta_1$، $\alpha_2 = \beta_2$، ...، $\alpha_n = \beta_n$.

به عبارت دیگر، دوبردار مساوی‌اند وقتی وفقط وقتی‌که به ازای هر i، مؤلفهٔ i ام آنها یکسان باشد.

اکنون می‌خواهیم گرد آوردهٔ همهٔ n-بردارهای ستونی را بایک ساختار جبری مجهز کنیم. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو n-بردار ستونی باشند، **حاصلجمع** $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را که به‌شکل $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ نوشته می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$، آنگاه

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}.$$

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

توجه کنید کـه جمع دوبردار فقط وقتی تعریف می‌شود کـه دوبردار دارای اندازهٔ یکسان باشند؛ یعنی، وقتی تعداد مؤلفه‌های آنها برابر باشد.

درحالت کلی، وقتی با بردار سروکار داریم، عـدد را **اسکالر** می‌نامیم. اعـداد حقیقی اسکالرهای حقیقی، و اعداد مختلط اسکالرهای مختلط هستند.

عمل مهم دیگـر، ضرب اسکالر است. اگـر $\mathbf{c}$ یک n-بـردار ستونی و α یک اسکالر باشد، **مضرب اسکالر** بردار $\mathbf{c}$ با ضریب اسکالر α را با $\alpha\mathbf{c}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

اگر $\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$، آنگاه $\alpha\mathbf{c}=\begin{bmatrix} \alpha c_1 \\ \alpha c_2 \\ \vdots \\ \alpha c_n \end{bmatrix}$.

برای مثال،

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad 3\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -31 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ -93 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (-1)\begin{bmatrix} 8 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

تعاریف مشابهی بـرای جمع n-بردارهای مختلط، و ضرب n-بـردارهای مختلط در اسکالرهای مختلط می‌توان ارائه داد.

این تعاریف را می‌توان برحسب مؤلفه‌ها به صورت زیر بیان کرد:

مؤلفهٔ i ام حاصلجمع دو بـردار عبارت است از حاصلجمع مؤلفه‌هـای i ام آن دو بـردار.
مؤلفهٔ i ام $\alpha\mathbf{c}$، α برابر مؤلفهٔ i ام $\mathbf{c}$ است.

اعمال جمع، وضرب اسکالر بردارها درچند قـانون جبری صدق می‌کنند کـه ارزش یادآوری دارند. ذیلاً، فرض می‌کنیم $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$، n-بردار و λ و μ اسکالر باشند و

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}.$$

اول صحت **قانون جابجایی** را درمورد جمع برداری تحقیق می‌کنیم.

گزارهٔ ۱ $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b}+\mathbf{a}=\begin{bmatrix}\beta_1+\alpha_1\\ \beta_2+\alpha_2\\ \vdots\\ \beta_n+\alpha_n\end{bmatrix}.$$

چون برای همهٔ اعداد حقیقی، $\alpha_i+\beta_i=\beta_i+\alpha_i$، با استفاده از تعریف تساوی بردارها، $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$. ●

حال صحت قانون انجمنی را درمورد جمع برداری نشان می‌دهیم.

گزارهٔ ۲ $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{b}+\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\beta_1+\gamma_1\\ \beta_2+\gamma_2\\ \vdots\\ \beta_n+\gamma_n\end{bmatrix}،$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\begin{bmatrix}(\alpha_1+\beta_1)+\gamma_1\\ (\alpha_2+\beta_2)+\gamma_2\\ \vdots\\ (\alpha_n+\beta_n)+\gamma_n\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\begin{bmatrix}\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1)\\ \alpha_2+(\beta_2+\gamma_2)\\ \vdots\\ \alpha_n+(\beta_n+\gamma_n)\end{bmatrix}.$$

چون برای همهٔ اعداد حقیقی، $\alpha_i+(\beta_i+\gamma_i)=(\alpha_i+\beta_i)+\gamma_i$، با استفاده از تعریف تساوی بردارها داریم: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$. ●

بردار صفر، که آن را با $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم، عبارت است از n-بردار

$$\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

یعنی، برداری که همهٔ مؤلفه‌های آن صفرند. از فحوای مطلب روشن خواهد بود که چه اندازه‌ای برای برداری که با $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم، مورد نظر است.

گزارهٔ ۳ $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 0+\alpha_1 \\ 0+\alpha_2 \\ \vdots \\ 0+\alpha_n \end{bmatrix}$$

لکن، می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی α_i، $0+\alpha_i=\alpha_i$. لذا

$$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}=\mathbf{a}.$$

به همین ترتیب $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$. ●

اگر $\mathbf{a}$ یک بردار باشد، قرینهٔ $\mathbf{a}$، که آن را با $-\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$، آنگاه $-\mathbf{a}=\begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{bmatrix}$.

بنابراین،

$$-\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

اکنون گزارهٔ زیر مستقیماً از تعریف فوق نتیجه می‌شود:

گزارهٔ ۴ $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

ضرب اسکالر نیز در چند قانون جبری صدق می‌کند.

گزارهٔ ۵ $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$

اثبات بنا به تعریف جمع برداری،

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{bmatrix}$، پس، بنا به تعریف ضرب اسکالر، $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\begin{bmatrix} \lambda(\alpha_1+\beta_1) \\ \lambda(\alpha_2+\beta_2) \\ \vdots \\ \lambda(\alpha_n+\beta_n) \end{bmatrix}$.

و همین طور

$\lambda\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix}$ و $\lambda\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda\beta_1 \\ \lambda\beta_2 \\ \vdots \\ \lambda\beta_n \end{bmatrix}$، لذا، بنا به تعریف جمع برداری

$$\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1 \\ \lambda\alpha_2 + \lambda\beta_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \lambda\beta_n \end{bmatrix}.$$

چون به ازای همهٔ اعداد حقیقی، $\lambda(\alpha_i+\beta_i) = \lambda\alpha_i+\lambda\beta_i$، با استفاده از تعریف تساوی برداری، داریم: $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$. ●

اثبات قوانین مهم زیر به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود:

$$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a},$$
$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a},$$
$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

تفاضل بردارها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار باشند، $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b})$. این تساوی را بر حسب مؤلفه‌ها می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1-\beta_1 \\ \alpha_2-\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n-\beta_n \end{bmatrix}.$$

قوانینی که به دست آوردیم، از این جهت مفیدند که به ما امکان می‌دهند محاسبات جبری با بردارها را بدون رجوع مستمر به مؤلفه‌های آنها انجام دهیم.

برای مثال، جهت حل معادلهٔ $\mathbf{x}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$ نسبت به بردار $\mathbf{x}$، $-\mathbf{a}$ را به طرفین این تساوی می‌افزاییم تا چنین حاصل شود

$$(\mathbf{x}+\mathbf{a})+(-\mathbf{a}) = \mathbf{b}+(-\mathbf{a}),$$
$$\mathbf{x}+(\mathbf{a}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}-\mathbf{a},$$
$$\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{b}-\mathbf{a},$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

در این مثال، عمداً تمام مراحلی را که حل این معادله دربردارد، نشان دادیم. لکن، پس از کمی تمرین، می‌توان جواب را بلافاصله نوشت. به‌طور کلی، قوانین جبریی که در بالا ارائه شد ما را قادر می‌سازند تا محاسبات برداری را به‌طرزی بسیار شبیه محاسبات جبری انجام دهیم.

همان طور که قبلاً تذکر دادیم، بردار را می‌توان برای توصیف یک شیء به وسیلهٔ یک نماد ریاضی، وقتی که نتوان این شیء را با یک عدد تنها توصیف کرد، به‌کار برد. برای نشان دادن این که چگونه این مطلب می‌تواند مفید واقع شود، مسئلهٔ ساده‌ای را مطرح می‌کنیم.

چهار ظرف روی یک میز قرار دارد و تعدادی گوی در هر یک از این ظروف جای داده شده است. در ظرف اول ۳۵ گوی، در ظرف دوم ۱۸، در سومی ۲۱، و در چهارمی ۳۷ گوی قرار دارند. می‌خواهیم گویها را طبق قاعدهٔ زیر بین ظروف جابجا کنیم:

(۱) چهار گوی از ظرف اول برمی‌داریم، سه‌تای آنها را در ظرف دوم و یکی را در ظرف سوم قرار می‌دهیم.
(۲) سه گوی از ظرف دوم برمی‌داریم و در ظرف سوم قرار می‌دهیم.
(۳) دو گوی را از ظرف سوم به ظرف چهارم منتقل می‌کنیم.
(۴) از ظرف چهارم پنج گوی برمی‌داریم، یکی را در ظرف اول و چهارتای دیگر را در ظرف دوم قرار می‌دهیم.

اگر تمام این عملیات پنج بار تکرار شود، در هر ظرف چند گوی خواهد بود؟

دستگاه را با برداری که مؤلفهٔ iام آن تعداد گویهای موجود در ظرف iام است، توصیف می‌کنیم. لذا، اولین وضع دستگاه با بردار

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} ۳۵ \\ ۱۸ \\ ۲۱ \\ ۳۷ \end{bmatrix}$$

داده می‌شود.

همچنین هر مرحله از دنبالهٔ عملیات را با یک بردار توصیف می‌کنیم. بردار

$$\mathbf{s}_۱ = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مشخص کنندهٔ مرحلهٔ اول است.

ملاحظه می‌کنیم که از افزودن $\mathbf{s}_۱$ به $\mathbf{n}$ همان نتیجه حاصل می‌شود که از انجام مرحلهٔ اول عملیات. یعنی، از مؤلفهٔ اول ۴ واحد برداشته شده، به دومی ۳ واحد و به سومی یک واحد اضافه شده است. لذا، بردار $\mathbf{n} + \mathbf{s}_۱$ بردار معرف وضع دستگاه پس از انجام مرحلهٔ اول می‌باشد. بردارهای

$$\mathbf{s}_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}، \quad \mathbf{s}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \text{ و } \quad \mathbf{s}_۴ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۰ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

توصیف کنندهٔ سه مرحلهٔ باقیمانده هستند.

لذا، در مرحلهٔ دوم، از مؤلفهٔ دوم ۳ واحد برداشته می‌شود و در مؤلفهٔ سوم ۳ واحد قرار می‌گیرد و به‌همین ترتیب.

پس از انجام مرحلهٔ دوم، بردار $\mathbf{n} + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ معرف وضع دستگاه می‌باشد. پس از اجرای مراحل سوم و چهارم، وضع دستگاه عبارت است از $\mathbf{n}+\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3+\mathbf{s}_4$. بالاخره اگر تمام عملیات پنج‌بار تکرار شود، بردار $\mathbf{n} + 5(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3+\mathbf{s}_4)$ مشخص‌کنندهٔ وضع دستگاه است.

چون $$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}،$$

وضع نهایی، با بردار

$$\mathbf{n} + 5\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 18 \\ 21 \\ 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \\ 10 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 38 \\ 31 \\ 22 \end{bmatrix}$$

داده می‌شود. البته، این نتیجه را بدون استفاده از بردارها نیز می‌توانستیم به دست آوریم. لکن خوانندهٔ فکور مـی‌فهمد که بـه‌کار بردن بـردارها روشی با اسلوب برای جدولبندی داده‌ها است و از اشتباهات ناشی از بی‌دقتی جلوگیری می‌نماید.

تمرینات

۱. محاسبات زیر را انجام دهید.

(الف) $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ج) $2\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix}$ (د) $3\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$

(ه) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

۲. هر یک از معادلات زیر را نسبت به $\mathbf{x}$ حل کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \mathbf{x} + \begin{bmatrix} ۴ \\ -۲ \\ ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -۶ \\ ۵ \\ ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۳\mathbf{x} + \begin{bmatrix} ۷ \\ ۰ \\ ۳ \\ -۳ \end{bmatrix}$

۳. قوانین زیر را ثابت کنید:

$$(\mu + \lambda)\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}$$
$$\mu(\lambda\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a}$$
$$۱ \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

۴. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو n-بردار باشند و $\mathbf{a} + ۳\mathbf{b} = \mathbf{a}$، نشان دهید که $\mathbf{b} = ۰$.

۵. اگر $\alpha\mathbf{x} = ۰$ و $\alpha \neq ۰$، نشان دهیدکه $\mathbf{x} = ۰$. اگر $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}$ و $\alpha \neq \beta$، نشان دهید که $\mathbf{x} = ۰$.

۶. دو ۲-بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بیابید به طوری که معادلهٔ $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{b}$ نسبت به اسکالر α حل‌پذیر نباشد.

۷. اگر $\mathbf{x}$، $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$، n-بردار باشند، معادلهٔ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{c} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})) + \mathbf{c})$ را نسبت به $\mathbf{x}$ و بر حسب $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ حل کنید.

۸. معادلات $\mathbf{x} + ۲\mathbf{y} = \mathbf{a}$ و $۲\mathbf{x} + ۵\mathbf{y} = \mathbf{b}$ را برای یافتن بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ برحسب بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ حل کنید.

۹. نشان دهید که دقیقاً ۲^n، n-بردار وجود دارد که همهٔ مؤلفه‌های آنها ۰ و ۱ است.

۱۰. نشان دهید که تمام قوانین جمع برداری، و ضرب اسکالر در مورد بردارهای مختلط برقرارند.

۱۱. اسکالرهای x و y را بیابید به طوری که $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$.

۱۲. برای ۲-بردارهای $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۹ \end{bmatrix}$، و $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$، اسکالرهای λ، μ، و γ را بیابید به‌طوری که لااقل یکی از آنها صفر نباشد و

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = ۰ .$$

ثابت‌کنیدکه درحالت‌کلی، اگر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$، ۲-بردارهای دلخواه باشند، این‌کار ممکن است.

۱۳. سه ظرف که در هر یک تعداد معینی گوی، است، روی یک میز قرار دارند. تعداد گویهای موجود در هر ظرف را با بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \\ n_۳ \end{bmatrix}$، که در آن n_i تعداد گویهای ظرف iام است، نشان می‌دهیم. فرض کنید که در ابتدا $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۲۳ \\ ۱۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$. عمل تغییر مکان زیر انجام

می‌گیرد: از ظرفی که حاوی بیشترین تعداد گوی است دو گوی برمی‌داریم و یک گوی در هر یک از دو ظرف دیگر قرار می‌دهیم.

(الف) اگر این عمل به اندازهٔ کافی تکرار شود، نشان دهید که تنها اوضاع دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۱۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱۲ \\ ۱۴ \\ ۱۳ \end{bmatrix}، \text{و} \begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۱۲ \\ ۱۴ \end{bmatrix}$$ است.

(ب) وضع دستگاه پس از ۱۰۰ بار انجام این عمل چیست؟

۱۴. یک بررسی اقتصادی در مورد ۳۰ خانواده انجام می‌شود تا معین گردد که این خانواده‌ها چگونه پولهایشان را خرج می‌کنند. به خانوادهٔ iام یک بردار $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$ نسبت داده شده است، که در آن a_1، a_2، a_3، و a_4، درصدی از درآمد خانواده است که، بترتیب، برای غذا، مسکن، لباس، و سایر موارد خرج می‌گردد. معنی بردار $(1/30)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_{30})$ چیست؟

۱۵. سه دهکدهٔ A، B، و C، بترتیب، دارای ۵۰۰، ۴۵۰، و ۶۰۰ نفر جمعیت هستند. در طی یک سال عادی، ۵۰ نفر A را ترک می‌کنند که ۲۰ نفر آنها به B و ۳۰ نفر به C می‌روند. در طی یک سال عادی، ۶۰ نفر B را ترک می‌کنند که نصف آنها به A و نصف دیگر به C می‌روند و بالاخره، در طی یک سال عادی، ۸۰ نفر C را ترک می‌کنند که نصف آنها در A و نصف دیگر در B ساکن می‌شوند. با فرض اینکه از لحاظ دیگر جمعیت ثابت باشد، جمعیت A، B، و C را پس از انقضای ده سال بیابید.

۱۶. اگر

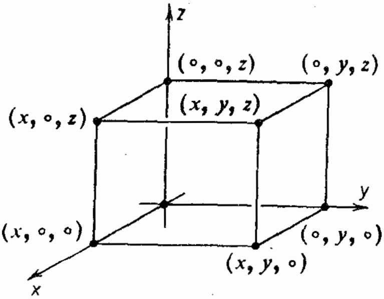
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_3 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_{n-1} \\ \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_n \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ را برحسب $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ بیابید، که در آن $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ و $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ بردار هستند.

۲ تعبیر هندسی R^2 و R^3

همان طور که نقاط صفحه را می‌توان به صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد، نقاط فضا را نیز می‌توان به صورت سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی نمایاند. برای

اجرای این طرز نمایش، سه خط دو به دو متعامد را که در یک نقطه از فضا یکدیگر را قطع می‌کنند انتخاب می‌کنیم. این خطوط را محور xها، محور yها، و محور zها و نقطهٔ تلاقی آنها را مبدأ می‌نامند. (ر. ک. شکل ۱.۲.)



شکل ۱.۲

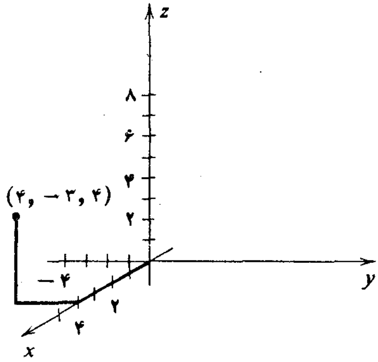
صفحهٔ متشکل ازمحور yها و محور zها را صفحهٔ yz گویند. (صفحهٔ xy و صفحهٔ xz به روش مشابه معین می‌گردند.) برای یافتن مختص x یک نقطهٔ P در فضا، صفحه‌ای را که از نقطهٔ P به موازات صفحهٔ yz می‌گذرد، درنظر می‌گیریم. نقطهٔ تلاقی این صفحه با محور xها، مختص x نقطهٔ P نامیده می‌شود. مختص y این نقطه با تعیین نقطهٔ تلاقی صفحه‌ای که از نقطهٔ P به‌موازات صفحهٔ xz می‌گذرد با محور yها به دست می‌آید. و همین طوربرای مختص z نقطهٔ P. با استفاده از این روش، می‌توانیم به هر نقطهٔ P در فضا یک سه تایی از اعداد حقیقی (x, y, z) نسبت دهیم. همچنین، بـه هر سه تایی از اعداد حقیقی می‌توانیم نقطه‌ای ازفضا را نسبت دهیم که این سه تایی مختصات آن است. نقطهٔ (o, o, o) را که در آن سه محور یکدیگر را قطع می‌کنند مبدأ دستگاه مختصات می‌نامند.

برای‌مثال، جهت تعیین نقطهٔ $(۴, -۳, ۴)$، روی محور xها، چهارواحدجلو می‌رویم، سپس به‌موازات محور yها، ۳ــ واحد پایین می‌آییم، و بالاخره به‌موازات محور zها (به سمت بالا) ۴ واحد پیش می‌رویم. این وضعیت در شکل ۲.۲ تشریح شده است.

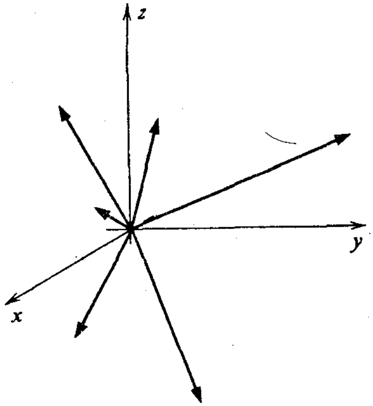
با این روش نمایش نقاط، می‌بینیم که محورxها متشکل ازنقاطی به صورت (α, o, o) است که درآن α یک عدد حقیقی است. صفحهٔ xy متشکل ازنقاطی به صورت (α, β, o) است. نقاط محور yها و محور zها و بقیهٔ صفحات را به طریق مشابه می‌توان نشان داد.

ازدیدگاه‌هندسی، **بردار** را به‌عنوان **پاره‌خطی جهت‌دار** که ابتدای آن مبدأمختصات و انتهایش یک نقطه در فضاست، تعریف مـی‌کنیم. شکل ۳.۲ چند بردار را نشان می‌دهد. بردارها را می‌توان به صورت پیکانهایی که از مبدأ شروع می‌شوند در نظر گرفت.

اگر انتهای بردار $\mathbf{v}$ نقطهٔ (x, y, z) در فضا باشد، برای سهولت، اغلب می‌نویسیم $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$. لذا $\mathbf{v}(۴, -۳, ۴)$ پاره‌خط جهت‌داری است درفضا که ازمبدأ شروع و به‌نقطهٔ $(۴, -۳, ۴)$ ختم می‌شود. این ساده نویسی به‌ما توانایی می‌دهد که بردارهایی را که در بخش قبلی به‌عنوان اشیاء جبری تعریف کردیم، به‌طور هندسی تجسم کنیم.



شکل ۲۰۲

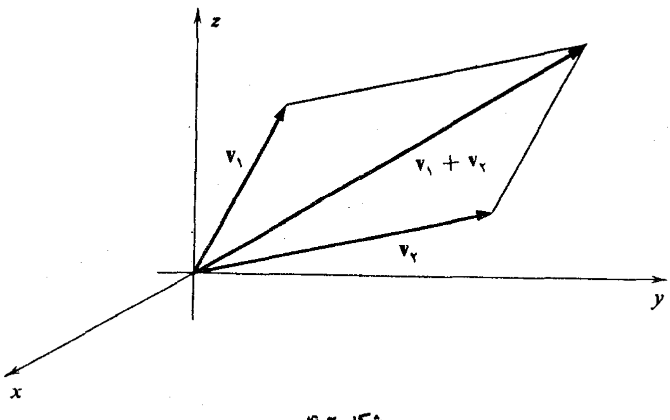


شکل ۳۰۲

لذا، ۳-بردار ستونی $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ را به‌عنوان بردار هندسی $\mathbf{v}(x, y, z)$ در نظر می‌گیریم.

در بخش قبلی، جمع و ضرب اسکالر بردارها از دیدگاهی جبری مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش، این اعمال را از دیدگاه هندسی مورد بحث قرار می‌دهیم.

جمع برداری را، به‌طورهندسی، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. در صفحهٔ متشکل از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ (ر. ک. شکل ۴۰۲)، متوازی‌الاضلاعی بسازید که $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ دو ضلع مجاور آن باشند. بردار $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ را به‌عنوان پاره خط جهت داری در امتداد قطر متوازی‌الاضلاع تعریف می‌کنیم. گیریم $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(x, y, z)$ و $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(x', y', z')$. آنگاه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ متناظر با بردارهای ستونی $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$ هستند. حاصلجمع این دو بردار



شکل ۴۰۲

$\begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{bmatrix}$ است، که نظیر بردار $\mathbf{v}(x + x', y + y', z + z')$ می‌باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که تعاریف جبری و هندسی جمع برداری سازگارند. برای این‌کار باید نشان دهیم که $\mathbf{v}(x, y, z) + \mathbf{v}(x', y', z') = \mathbf{v}(x + x', y + y', z + z')$.

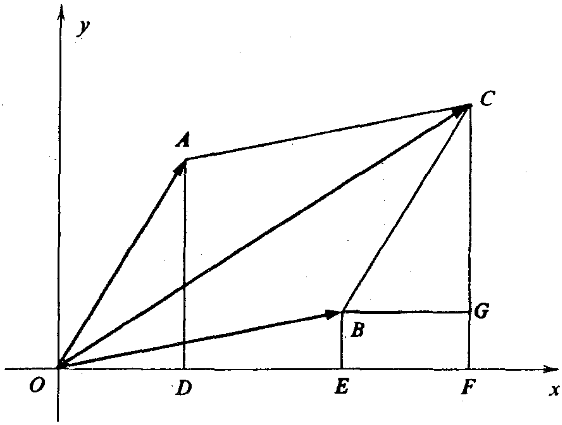
این امررا در صفحه ثابت می‌کنیم، و فرموله کردن‌آن درفضای سه بعدی را به عهدهٔ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌گذاریم. لذا، می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{v}(x, y) + \mathbf{v}(x', y') = \mathbf{v}(x + x', y + y').$$

در شکل ۵.۲، گیریم $\mathbf{v}(x, y)$ برداری باشد که انتهایش نقطه A است و $\mathbf{v}(x', y')$ آن برداری که انتهایش نقطهٔ B است. انتهای بردار $\mathbf{v}(x, y) + \mathbf{v}(x', y')$ رأس C از متوازی‌الاضلاع $OBCA$ می‌باشد. نشان می‌دهیم که

$$\mathbf{v}(x, y) + \mathbf{v}(x', y') = \mathbf{v}(x + x', y + y'),$$

یا به عبارت دیگر، $(x + x', y + y')$ مختصات رأس C است.

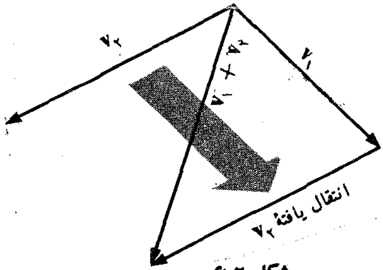


شکل ۵.۲

می‌توان در شکل مشاهده کردکه مثلث OAD با مثلث CBG همنهشت است. همچنین، مشاهده می‌کنیم که $x =$ طول OD و $x' =$ طول OE. با استفاده از رابطهٔ همنهشتی طول$BG =$ طول OD، وچون $BGFE$ یک‌مربع‌مستطیل‌است، داریم‌طول $EF =$ طول OD.
اما طول $OE +$ طول $EF =$ طول OF، و لذا $x + x' =$ طول OF. در نتیجه، $x + x'$ مختص x نقطهٔ C است. به‌طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $y + y'$ مختص y نقطهٔ C می‌باشد. ازاینجا، می‌بینیم که تعریف هندسی جمع برداری هم ارز است با تعریف جبری که درآن مؤلفه‌ها را جمع می‌کنیم.

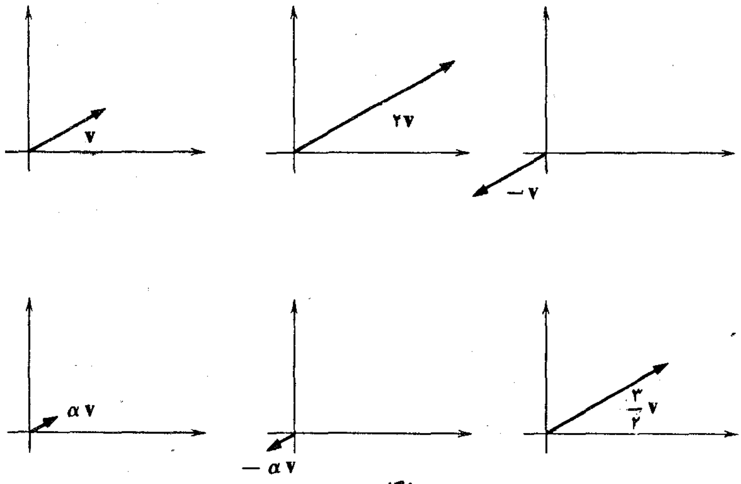
شکل ۶.۲، نشان می‌دهد که جمع برداری را همچنین می‌توان به‌این ترتیب در نظر

گرفت: پاره خط جهت‌دار معرف $\mathbf{v}_2$ را طوری انتقال می‌دهیم که ابتدای آن بر انتهای $\mathbf{v}_1$ قرار گیرد. نقطهٔ انتهایی پاره خط جهت‌دار حاصل، انتهای بردار $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ است.



شکل ۶.۲

مضارب اسکالر بردارها دارای تعبیر هندسی مشابهی هستند. اگر α یک اسکالر و $\mathbf{v}$ یک بردار باشد، $\alpha\mathbf{v}$ را می‌توان به‌عنوان برداری تعریف کرد که طول آن $|\alpha|$ برابر طول $\mathbf{v}$ و جهت آن، وقتی $\alpha > 0$، همان جهت $\mathbf{v}$ است و وقتی $\alpha < 0$، خلاف جهت $\mathbf{v}$ می‌باشد. شکل ۷.۲، نشان دهندهٔ چند مثال است.



شکل ۷.۲

با استدلالی بر اساس تشابه مثلثها، می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\alpha\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

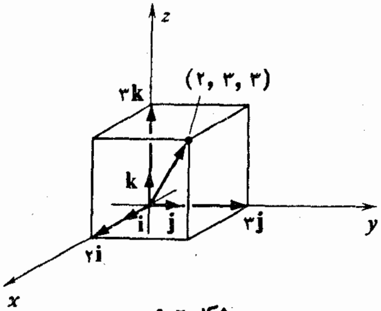
باز، تعریف هندسی منطبق با تعریف جبری است.

بردار $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ چیست؟ چون $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$، واضح است که $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ آن برداری است که وقتی به $\mathbf{a}$ اضافه می‌شود، $\mathbf{b}$ را نتیجه می‌دهد. با توجه به این نکته، $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ موازی پاره خط جهت داری است که از نقطهٔ انتهایی $\mathbf{a}$ شروع و در نقطهٔ انتهایی $\mathbf{b}$ ختم می‌شود. (ر. ک. شکل ۸.۲)

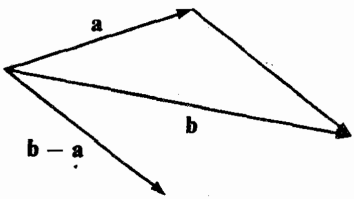
اگر برداری راکه انتهایش $(1, 0, 0)$ است با $\mathbf{i}$ و برداری‌راکه در $(0, 1, 0)$ ختم می‌شود با $\mathbf{j}$، و برداری با نقطهٔ انتهایی $(0, 0, 1)$ را با $\mathbf{k}$ نشان دهیم،آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x, y, z) &= \mathbf{v}(x, 0, 0) + \mathbf{v}(0, y, 0) + \mathbf{v}(0, 0, z)\\ &= x\,\mathbf{v}(1, 0, 0) + y\,\mathbf{v}(0, 1, 0) + z\,\mathbf{v}(0, 0, 1)\\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\end{aligned}$$

درنتیجه، هر برداردرفضای سه بعدی را می‌توان برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ نشان‌داد. برای مثال، برداری با نقطهٔ انتهایی $(2, 3, 3)$، عبارت از $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ است، وآن که در $(0, -1, 4)$ ختم می‌شود، $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۹.۲.) بردارهای $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ را بردارهای **پایهٔ متعارف** برای $\mathbf{R}^3$ گویند.



شکل ۹.۲



شکل ۸.۲

همچنین داریم

$$\begin{aligned}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) &+ (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k})\\ &= (x + x')\mathbf{i} + (y + y')\mathbf{j} + (z + z')\mathbf{k}\end{aligned}$$

و

$$\alpha(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\alpha x)\mathbf{i} + (\alpha y)\mathbf{j} + (\alpha z)\mathbf{k}$$

به علت تناظر بین بردارها و نقاط، گاهی ممکن است در حالتی که $\mathbf{a}$ به عنوان یک بردار تعریف شده است،آن را نقطهٔ $\mathbf{a}$ بنامیم. خواننده باید تشخیص دهد که مقصود ما نقطهٔ انتهایی بردار $\mathbf{a}$ است.

به عنوان مثالی ازکاربرد این مفاهیم، جهت توصیف نقاطی که درون و روی محیط متوازی‌الاضلاعی بااضلاع‌مجاور $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هستنداز بردارها استفاده می‌کنیم. (ر.ک.شکل۱۰.۲.)

اگر P نقطه‌ای در متوازی‌الاضلاع باشد و خطوط l_1 و l_2 را بترتیب، به موازات بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ رسم کنیم، می‌بینیم که l_1 ضلعی ازمتوازی‌الاضلاع راکه با بردار $\mathbf{b}$ مشخص شده است دریک نقطهٔ $t\mathbf{b}$ قطع می‌کند که درآن $0 \leqslant t \leqslant 1$ همین طور، l_2 ضلع مشخص شده با بردار $\mathbf{a}$ را در یک نقطهٔ $s\mathbf{a}$ که درآن $0 \leqslant s \leqslant 1$ است، قطع می‌کند.

چون دراین صورت P نقطهٔ انتهایی قطرمتوازی‌الاضلاعی با اضلاع مجاور $t\mathbf{b}$ و $s\mathbf{a}$

است، اگر $\mathbf{v}$ نشان دهندهٔ برداری باشد که به P ختم می‌شود، می‌بینیم که $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. لذا، همهٔ نقاط داخل متوازی‌الاضلاع، نقاط انتهایی بردارهایی به‌صورت $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ که $۱ \geqslant s \geqslant ۰$ و $۱ \geqslant t \geqslant ۰$، هستند. با معکوس کردن مراحل فوق به آسانی می‌بینیم که نقاط انتهایی همهٔ این قبیل بردارها داخل متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

مثال ساده‌ای از این مطلب که اعمال برداری چگونه در مسائل فیزیکی پیش می‌آیند، با استفاده ازمفهوم مرکز جرم فراهم می‌آید. فرض می‌کنیم دستگاهی از k جسم با جرمهای $m_۱$، $m_۲$، . . . ، و m_k و بترتیب با بردارهای مکان $\mathbf{r}_۱$، $\mathbf{r}_۲$، . . . و $\mathbf{r}_k$ در صفحه وجود دارد. به‌عبارت دیگر در نقطهٔ انتهایی بردار $\mathbf{r}_k$ جسمی به‌جرم m_k قرار دارد. مرکز جرم دستگاه، بنا به تعریف، انتهای بردار

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_۱\mathbf{r}_۱ + m_۲\mathbf{r}_۲ + \cdots + m_k\mathbf{r}_k}{m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k}$$

می‌باشد. یک اصل بنیادی فیزیک می‌گوید که اگرصفحه به‌طور افقی از مرکز جرم آویزان شود، دستگاه در حال تعادل باقی می‌ماند. در واقع، مفهومی که در این اصل نهفته است با مفهومی که از آن برای تعادل خطکش در مثال ۲ از بخش ۱.۱ استفاده کردیم، هیچ فرقی ندارد. لکن، در این حالت چون اجسام بجای خط روی صفحه پراکنده‌اند، مکان مرکز جرم با بردار مشخص می‌شود و نه با اسکالر.

برای مثال، فرض می‌کنیم سه جسم در صفحه دارای مکانهای (۰, ۱)، (۱, ۰)، و (۱ −, ۱ −) و بترتیب دارای جرمهای ۲، ۱، و ۳ باشند. دراین صورت بردارهای مکان این سه جسم $\mathbf{r}_۱ = \mathbf{i}$، $\mathbf{r}_۲ = \mathbf{j}$، و $\mathbf{r}_۳ = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$ است. پس

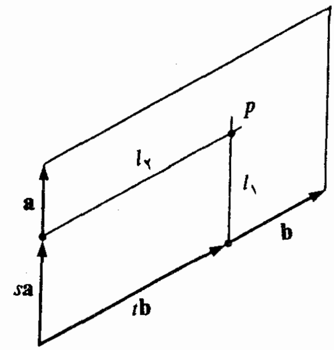
$$\mathbf{r}_c = \frac{۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳(-\mathbf{i} - \mathbf{j})}{۲ + ۱ + ۳} = \frac{۱}{۶}(-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j})$$

بنابراین، مختصات مرکز جرم (۱/۳ − و ۱/۶ −) می‌باشد. (ر. ک. شکل ۱۱.۲.) اگر صفحه به‌طورافقی ازنقطهٔ (۱/۳ − و ۱/۶ −) آویزان شده باشد، دستگاه در حال تعادل باقی می‌ماند.

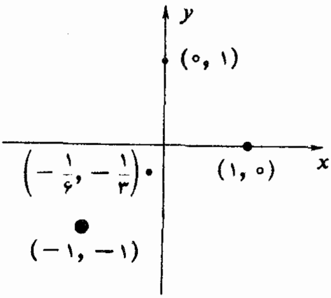
حال، معادلهٔ پارامتری خط را درفضای سه بعدی به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم L خطی درفضا باشد، $\mathbf{v}$ برداری در امتداد L و $\mathbf{a}$ برداری که انتهایش روی L است. (ر. ک. شکل ۱۲.۲.)

گیریم L' خطی باشد در امتداد بردار $\mathbf{v}$ که ازمبدأ می‌گذرد. وقتی t روی تمام اعداد حقیقی تغییر کند، نقاط به‌صورت $t\mathbf{v}$ همگی مضارب اسکالر بردار $\mathbf{v}$ هستند. لذا، همهٔ نقاط روی L' به صورت $t\mathbf{v}$ می‌باشند.

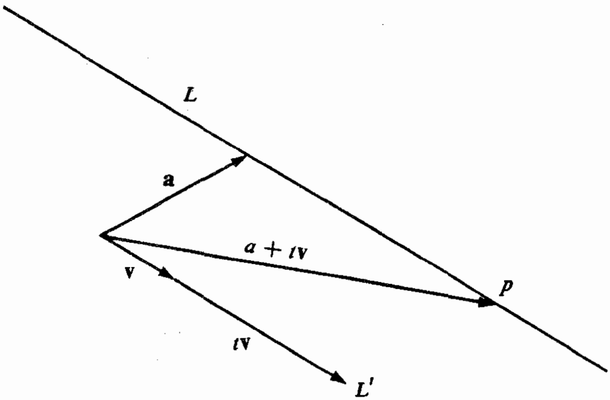
حال اگر P نقطه‌ای روی L باشد، P نقطهٔ انتهایی قطر متوازی‌الاضلاعی است که یک ضلع آن $\mathbf{a}$ می‌باشد و ضلع دیگرش روی L' قرار دارد. آن ضلع متوازی‌الاضلاع که روی L' قرار دارد به‌صورت $t\mathbf{v}$ است. لذا، P نقطهٔ انتهایی بردار $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ می‌باشد. در نتیجه، این خط را می‌توان به‌صورت پارامتری با معادلهٔ $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ بیان کرد.



شکل ۱۰.۲



شکل ۱۱.۲



شکل ۱۲.۲

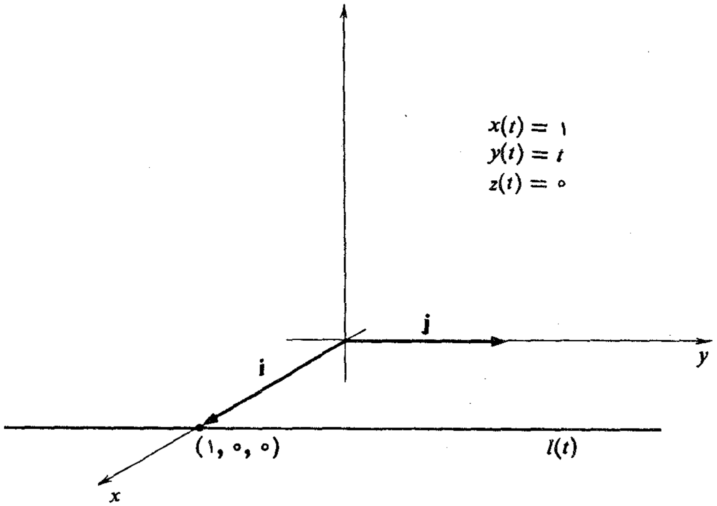
به ازای $t = 0$، $\mathbf{a} = \mathbf{l}(0)$. همچنانکه t صعود می‌کند، نقطهٔ $\mathbf{l}(t)$ در جهت $\mathbf{v}$ از $\mathbf{a}$ دورمی‌شود. وقتی t بااختیار مقادیر منفی از $t = 0$ نزول می‌کند، $\mathbf{l}(t)$ درجهت $-\mathbf{v}$ از $\mathbf{a}$ دور می‌شود.

البته اشکال پارامتری دیگری برای همین خط وجود دارند. این اشکال را می‌توان با انتخاب نقطهٔ دیگری روی این خط و تشکیل معادلهٔ پارامتری خطی که ازآن نقطه شروع می‌شود ودرامتداد $\mathbf{v}$ است، به دست‌آورد برای مثال، نقطهٔ $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ روی خط $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ است، و لذا $\mathbf{l}'(t) = \mathbf{a} + \mathbf{v} + t\mathbf{v}$ معرف همان خط است.

اشکال پارامتری دیگری را مـی‌توان، با مشاهدهٔ این امر که اگر $\alpha \neq 0$، بردار $\alpha\mathbf{v}$ در جهت یا خلاف جهت $\mathbf{v}$ است، به دست آورد. لذا، $\mathbf{l}'(t) = \mathbf{a} + \alpha t\mathbf{v}$ شکل پارامتری دیگری از $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ را به دست می‌دهد.

مثال ۱ معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $(1, 0, 0)$ در امتداد $\mathbf{j}$ می‌گذرد معین کنید.
خط مطلوب را به‌طور پارامتری، می‌توان به صورت $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$ مشخص کرد.

(ر. ک. شکل ۲. ۱۳.) بـر حسب مختصات، $x(t) = ۱$، $y(t) = t$، و $z(t) = ۰$. در این حالت، خط مزبور فصل مشترک صفحات $x = ۱$ و $z = ۰$ است.



شکل ۱۳.۲

همچنین، می‌توانیم معادلهٔ خطی را که از نقاط انتهایی دو بردار مفروض **a** و **b** می‌گذرد، پیدا کنیم.

در این حالت، بردار $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ موازی پاره خط جهت‌دار از **a** به **b** است؛ آنچه در واقع می‌خواهیم انجام دهیم، محـاسبهٔ معادلات پارامتری خطی است که در امتداد $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ از **a** می‌گذرد. (ر. ک. شکل ۱۴.۲.) بنابراین $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$، یا

$$\mathbf{l}(t) = (۱ - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

همچنانکه t از ۰ به ۱ صعود مـی‌کند، بردار $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ با شروع از بردار صفر، در حالی‌که طول آن زیاد می‌شود، در جهت $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ افزایش می‌یابد تا به‌ازای $t = ۱$، مساوی $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ می‌شود. لذا، در $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$، همچنانکه t از ۰ به ۱ صعود می‌کند، $\mathbf{l}(t)$ در امتداد پاره خط جهت‌دار از **a** به **b**، از نقطهٔ انتهایـی **a** به‌طرف نقطهٔ انتهایی **b** حرکت می‌کند.

مثال ۲ معادلهٔ خطی را بیابید که از نقاط $(۰, ۱, ۱-)$ و $(۱, ۰, ۰)$ می‌گذرد. (ر. ک. شکل ۱۵.۲.)

گیریم $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{k}$، داریم

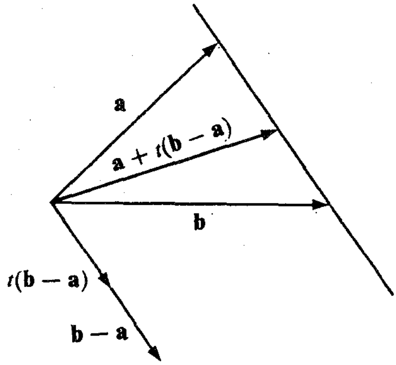
$$\begin{aligned}\mathbf{l}(t) &= (۱ - t)\,(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t\mathbf{k}\\ &= -(۱ - t)\mathbf{i} + (۱ - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$z(t) = t \quad y(t) = ۱ - t \quad x(t) = -۱ + t$$

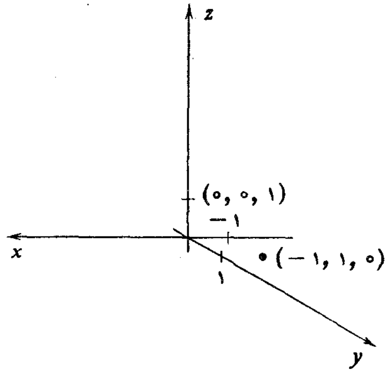
قبل از ادامهٔ بحث، متذکر می‌شویم که هر بردار $\mathbf{c}$ به‌صورت $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$، که درآن $\lambda + \mu = ۱$، روی خطی است که از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌گذرد. زیرا،

$$\mathbf{c} = (۱ - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

و لذا، $\mathbf{c}$ روی خطی است که از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌گذرد.



شکل ۱۴.۲



شکل ۱۵.۲

به عنوان مثال دیگری از روشهای برداری، ثابت می‌کنیم که قطرهای یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

گیریم اضلاع مجاورمتوازی‌الاضلاعی با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ آن طور که درشکل ۱۶.۲ می‌بینید، نشان داده شده باشند. ابتدا برداری را که نقطه انتهایی‌اش وسط پاره‌خط PQ است به دست می‌آوریم. می‌دانیم که $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ موازی پاره خط جهت‌داراز P به Q است وبنا براین، $(\mathbf{b} - \mathbf{a})/۲$ موازی پاره خط جهت دار از P به وسط PQ است. لذا، بردار $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})/۲ = (۱/۲)\mathbf{a} + (۱/۲)\mathbf{b}$ در وسط PQ ختم می‌شود.

سپس، برداری را که انتهایش وسط پاره خط OR است به دست می‌آوریم. می‌دانیم که $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ در R ختم می‌شود، لذا نقطهٔ انتهایی $(\mathbf{a} + \mathbf{b})/۲$ وسط OR است.

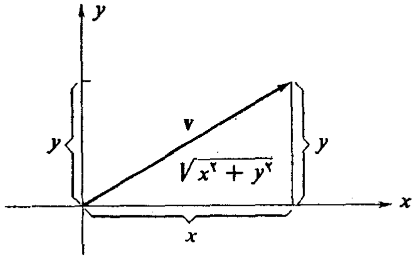
چون می‌دانیم که نقطهٔ انتهایی بردار $(۱/۲)\mathbf{a} + (۱/۲)\mathbf{b}$ هم وسط PQ است وهم وسط OR، بنابراین OR و PQ یکدیگر را نصف می‌کنند.

بردار در فضا هم طول دارد و هم جهت. بحث‌کاملی در بارهٔ طول و مفاهیم وابسته به آن در فصل ششم عرضه خواهد شد. لکن در حال حاضر، ارائهٔ فرمولی جهت محاسبهٔ طول به هیچ وجه مشکل نیست.

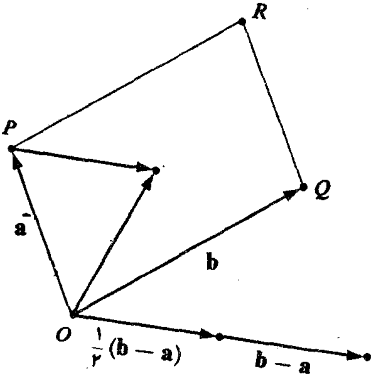
گیریم $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ برداری در $\mathbf{R}^۲$ باشد. در این صورت با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث (ر.ک.شکل ۱۷.۲)، $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ طول $\mathbf{v}$ است. برای‌مثال، طول بردار $۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j}$ برابر $\sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$ است. فرمول‌طول یک بردارمتعلق به $\mathbf{R}^۳$ درتمرین۶داده شده است.

بردارهایی که به طورهندسی تعریف شده‌اند وآنها را در این بخش مورد بحث قرار داده‌ایم، درفیزیک ومهندسی مورد استفادهٔ بسیارند. بسیاری ازکمیتهای فیزیکی، مانند نیرو،

گشتاور زاویه‌ای، سرعت، و شتاب، به طور خیلی طبیعی با بردارهایی از این نوع توصیف شده‌اند. برای مثال، اگر نیروی $\mathbf{f}$ روی جسم مفروضی اثـر کند، طول بردار $\mathbf{f}$، اندازهٔ نیرو است وجهت نیروهمان جهت $\mathbf{f}$ می‌باشد. وقتی چند نیرو برجسمی وارد شوند، نیروی برآیند وارد بر جسم همان حاصلجمع برداری نیروهاست.



شکل ۱۷.۲



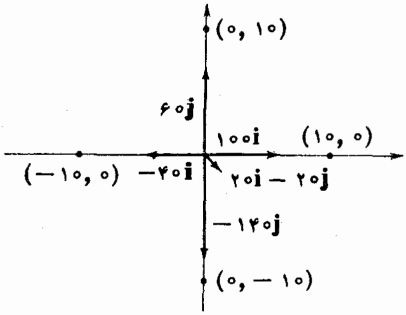
شکل ۱۶.۲ $\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$

مثال ۳ چهار نفر در یک مسابقهٔ طناب کشی شرکت می‌کنند. ایـن چهار نفر روی دایره‌ای به شعاع ۳ متردر فواصل یکسان قرار می‌گیرند. چهار طناب، به یک حلقهٔ فلزی که درمرکز دایره قرار دارد، گره زده شده‌اند و به هر نفر یک طناب داده شده است. اگـر این افراد، بترتیب (در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) نیروهای ۵۰، ۶۰، ۴۰، و ۷۰ کیلوگرمی وارد کنند، برآیند نیروهای وارد به حلقه چقدر است؟

برای حل این مسئله، دستگاه مختصاتی را که مبدأ آن مرکزدایره است درنظرمی‌گیریم. همان‌طورکه در شکل ۱۸.۲ می‌بینید، این افراد در مکانهای (۳, ۰)، (۰, ۳)، (۳−, ۰)، و (۰, ۳−) قرار گرفته‌اند.

فردی که در مکان (۳, ۰) است یک نیروی ۵۰ کیلوگرمی در جهت مثبت محور xها وارد می‌کند. این نیرو را می‌توان بـه صورت بردار $50\mathbf{i}$ در نظر گرفت. فردی که در مکان (۰, ۳) قرار دارد، نیروی $60\mathbf{j}$ را وارد می‌کند و دو نفر دیگر بترتیب نیروهای $-40\mathbf{i}$ و $-70\mathbf{j}$ را وارد مـی‌نمایند. نیروی برآیند، حاصلجمع بـرداری ایـن چهار بردار، یعنی $10\mathbf{i}-10\mathbf{j}$ است واندازهٔ آن طول‌این بردار، یعنی $10\sqrt{2}$ می‌باشد. جهت برداربرآیند در امتداد محمل بردار $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ است.

درسراسر این بخش، بردارها را به عنوان پاره‌خطهای جهت‌داری که از مبدأ شروع می‌شوند درنظرگرفتیم. دربسیاری ازکاربردها، بخصوص درفیزیک، مفهوم **بردارآزاد** بسیار مفیداست. بردارآزاد، چیزی نیست جزپاره‌خط جهت داری درفضا. دوبردارآزاد مساوی‌اند اگر همجهت و همطول باشند. با بردارهای آزاد مـی‌توانیم همانند بردارهایی که تا کنون داشته‌ایم عمل کنیم. فعلاً اشاره‌ای گذرا به این نکته می‌کنیم، ولـی ایدهٔ مزبور در زمینه‌های



شکل ۱۸۰۲

دیگر، ارائهٔ تعبیر هندسی طبیعی‌تری از بردارها را میسر می‌سازد.

تمرینات

۱. بردارهای زیر را رسم کنید.

(الف) $-۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (ب) $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (ج) $-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (د) $۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۲. مکعب محصور بین شش صفحهٔ $x = ۰$، $x = ۱$، $y = ۰$، $y = ۱$، $z = ۰$، و $z = ۱$ را در نظر بگیرید. بردارهایی را بیابید که نقاط انتهایی آنها رئوس این مکعب باشند.

۳. معادلهٔ پارامتری خطی را که از نقطهٔ انتهایی $\mathbf{i}$ در امتداد $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ می‌گذرد، بیابید. نقطهٔ تلاقی این خط با صفحهٔ $x = ۰$ و با صفحهٔ $y = ۲$ کدام است؟

۴. معادلهٔ خطی را بیابید که از نقاط $(-۱, -۱, ۰)$ و $(۲, ۱, ۲)$ می‌گذرد. نقطهٔ تلاقی این خط با صفحهٔ $x = ۰$ کدام است؟

۵. نشان دهید که

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + \lambda t \\ y(t) &= \beta + \mu t \\ z(t) &= \gamma + \nu t \end{aligned}$$

معادلات یک خط راست در فضا هستند.

۶. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث، نشان دهید که طول بردار $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، برابر $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ است.

۷. کدام نقطه از پاره خط واصل $(-۱, -۱, ۰)$ به $(۱, ۱, ۱)$، به‌مبدأ نزدیکتراست؟

۸. اگر سه بردار $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ در یک صفحه نباشند، نشان دهید که $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ قطر متوازی‌السطوحی است که اضلاعش $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ هستند. قانون انجمنی $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ را به طور هندسی تعبیر کنید.

۹. قوانین

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$$
$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$
$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$$

را که درآنها، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردار و λ و μ اسکالر هستند، به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۰. نشان دهید که نقاط انتهایی بردارهای $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ روی یک خط هستند اگر وفقط اگر اسکالرهای λ، μ، و γ وجود داشته باشند به طوری که لااقل یکی ازآنها صفر نباشد و

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} = ۰$$
$$\lambda + \mu + \nu = ۰$$

۱۱. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهایی ناهمخط باشند، نشان دهیدکه $\mathbf{a} + \mathbf{b}$، $-\mathbf{a} + \mathbf{b}$، $\mathbf{a} - \mathbf{b}$، و $-\mathbf{a} - \mathbf{b}$ رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۱۲. نشان دهید که شکل حاصل از وصل کردن اوساط اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع است.

۱۳. نقطهٔ وسط پاره خط واصل بین هر زوج از نقاط زیر را بیابید و آنها را نمایش دهید.

(الف) $(۰, ۰, ۱)$ و $(۱, ۱, ۱)$؛

(ب) $(۱, ۱, ۱)$ و $(-۱, ۱, ۱)$؛

(ج) $(۲, ۱, ۱)$ و $(۰, -۱, -۱)$.

۱۴. نقطه‌ای که روی پاره خط واصل $(x_۱, y_۱, z_۱)$ به $(x_۲, y_۲, z_۲)$ قرار دارد و فاصله‌اش از نقطهٔ $(x_۱, y_۱, z_۱)$، برابر $۱/۳$ طول پاره خط مذکور است، کدام است؟

۱۵. اگر $\mathbf{l}_۱(t)$ و $\mathbf{l}_۲(t)$ معادلات پارامتری دوخط باشند، نشان دهید که این خطوط موازی‌اند اگر و فقط اگر مقادیر ثابت $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ وجود داشته باشند به طوری که حداقل یکی از آنها صفر نباشد و $\lambda_۱\mathbf{l}_۱(t) + \lambda_۲\mathbf{l}_۲(t)$ بردار ثابتی باشد.

۱۶. سه نیرو برجسمی اثر می‌کنند. مکان جسم درمبدأ است. یک نیرو به اندازهٔ ۱۰ کیلوگرم درجهت مثبت محور xهاست. یک نیروی دیگر به‌اندازهٔ ۱۵ کیلوگرم در جهت مثبت محور yها اثرمی‌کند، وسومی به اندازهٔ ۲۰ کیلوگرم درجهت منفی محور xهاست. نیروی برآیند وارد بر جسم را بیابید.

۱۷. چهار جسم درچهار گوشهٔ مربع‌یکه، یعنی در $(۰, ۰)$، $(۱, ۰)$، $(۱, ۱)$، و $(۰, ۱)$ قرار دارند. جرم‌آنها، بترتیب، ۱، ۲، ۳، و ۴ است. مرکز جرم دستگاه را بیابید.

۳ ماتریسها

ماتریس را به عنوان‌آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی یا مختلط تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد داخل آرایه را **عناصر** یا **درایه‌های** ماتریس می‌نامیم. زیرنویسهای i و j عنصر a_{ij}، برای مشخص کردن سطر و ستونی که a_{ij} در آنها قرار دارد، به‌کار می‌روند.

برای مثال

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس است. عنصر $a_{۲۳}$ درسطر دوم وستون سوم قرار دارد و در این مثال، این عنصر ۲ می‌باشد. درایهٔ (۳ و ۳) صفر است.

ماتریسی را که دارای m سطر و n ستون باشد، ماتریس $m \times n$ یا ماتریس m در n می‌نامیم. وقتی که $m = n$، یعنی، وقتی که ماتریس **مربعی** است فقط گوییم که ماتریس از مرتبهٔ n است. برای مثال $\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳ × ۲ است، حال‌آنکه $\begin{bmatrix} ۳ & ۷ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲ × ۳ می‌باشد.

در جدولبندی داده‌ها، وقتی که تعدادآنها زیاد است، موضوع استفاده از ماتریسها به طور طبیعی پیش می‌آید. برای مثال، فاصله‌های بین شهرهای تهران، اصفهان، شیراز، و مشهد را می‌توان به صورت یک ماتریس جدولبندی کرد:

$$\begin{array}{c} \\ \text{اصفهان} \\ \text{تهران} \\ \text{شیراز} \\ \text{مشهد} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{اصفهان} & \text{تهران} & \text{شیراز} & \text{مشهد} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۴۱۴ & ۴۸۱ & ۱۳۳۸ \\ ۴۱۴ & ۰ & ۸۹۵ & ۹۲۴ \\ ۴۸۱ & ۸۹۵ & ۰ & ۱۷۸۶ \\ ۱۳۳۸ & ۹۲۴ & ۱۷۸۶ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

در این مثال، $a_{۱۲}$ فاصلهٔ اصفهان تا تهران، $a_{۱۳}$ فاصلهٔ اصفهان تا شیراز، و $a_{۴۲}$ فاصلهٔ مشهد تا تهران است. در نظر داشته باشید که در این مثال $a_{ii} = ۰$ و $a_{ij} = a_{ij}$.

اغلب، نماد فوق را به صورت $[a_{ij}]_{(mn)}$ خلاصه می‌کنیم. زیرنویس $m\,n$ اندازهٔ ماتریس را نشان می‌دهد وکل نماد به معنی یک ماتریس $m \times n$ است که درایهٔ (i, j) آن a_{ij} است. برای مثال، با این نماد، $[ij]_{(۲۳)}$ یعنی ماتریس ۲ × ۳ ای که درآن حاصلضرب ij در مکان $(i \text{ و } j)$ است، یا $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$.

دو ماتریس فقط و فقط وقتی مساوی‌اند که دارای مرتبهٔ یکسان باشند، و به‌ازای هر i، وهر j، درایهٔ (i و j) آنها یکی باشد. به‌عبارت دیگر، $[a_{ij}]_{(mn)} = [b_{ij}]_{(pq)}$ اگر و فقط اگر $m = p$، $n = q$ و به‌ازای هر i و هر j، $a_{ij} = b_{ij}$.

اگــر $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و $B = [b_{ij}]_{(mn)}$ دو ماتریس $m \times n$ باشند، $A + B$ را به‌صورت $[a_{ij} + b_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱۳ & ۷ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۳ & ۱ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۷}{۲} & -۴ & ۳ \\ ۰ & \frac{۲۵}{۲} & ۸ \\ ۱۰ & ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ ۴ & \frac{۲۲}{۳} \end{bmatrix}$$

ماتریس $-A$ را به صورت $-A = [-a_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال:

$$-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، برای جمع کردن ماتریسها، درایه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم. برای به‌دست آوردن قرینهٔ یک ماتریس، قرینهٔ درایه‌های مربوطه را به دست می آوریم.

مضرب اسکالر ماتریس A با ضریب اسکالر α راکه‌به صورت αA نوشته می‌شود، با $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. مثلاً،

$$۲\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۷ \\ -۸ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۰ & ۱۴ \\ -۱۶ & ۲ & -۶ \end{bmatrix}$$

این اعمال را با یک مثال ساده تشریح می‌کنیم. دانشگاهی دارای دو دانشکده است. تعداد دانشجویان دختر و پسر دورهٔ لیسانس و فوق لیسانس، در ماتریسهای زیر جدولبندی شده است:

$$A_۱ = \begin{array}{c} \\ \text{پسر} \\ \text{دختر} \end{array} \begin{array}{cc} \text{لیسانس} & \text{فوق لیسانس} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ۸۰ & ۳۰ \\ ۶۰ & ۲۰ \end{bmatrix}} \end{array} \qquad A_۲ = \begin{array}{c} \\ \text{پسر} \\ \text{دختر} \end{array} \begin{array}{cc} \text{لیسانس} & \text{فوق لیسانس} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۹۰ \\ ۱۶۰ & ۷۰ \end{bmatrix}} \end{array}$$

لذا، برای مثال، ۸۰ دانشجوی پسر در دورهٔ لیسانس در دانشکدهٔ اول وجود دارد، و ۷۰ دانشجوی دختر در سطح فوق لیسانس در دانشکدهٔ دوم. حاصلجمع دو ماتریس

$$A_۱ + A_۲ = \begin{bmatrix} ۲۸۰ & ۱۲۰ \\ ۲۲۰ & ۹۰ \end{bmatrix}$$

تعداد دانشجویان درهر دسته را برای کل دانشگاه می‌دهد. بنابراین، ۱۲۰ دانشجوی

پسر وجود دارند که دانشجوی فوق لیسانس نیز می‌باشند.

جمع ماتریسها و ضرب اسکالرآنهـا در همان قوانین جمع، و ضرب اسکالـر اعداد حقیقی و بردارها صدق می‌کنند.

گزارهٔ ۱ $(A+B)+C=A+(B+C)$.

اثبات گیریم

$$A=[a_{ij}]_{(mn)},\ B=[b_{ij}]_{(mn)},\ \text{و}\ C=[c_{ij}]_{(mn)}.$$

حال آنکه $(A+B)+C=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{(mn)}$

$$A+(B+C)=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{(mn)}$$

ولی، برای‌همهٔ اعداد حقیقی، $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$.
بنابراین $(A+B)+C=A+(B+C)$.

قوانین دیگر نیز، اثبات مشابهی دارند.

گزارهٔ ۲ $A+B=B+A$.

گزارهٔ ۳ $A+(-A)=-A+A=\circ$، که درآن $\circ$ نشان دهندهٔ ماتریسی هم مرتبهٔ با A است که همهٔ درایه‌هایش صفرند.

گزارهٔ ۴ $A+\circ=\circ+A=A$.

گزارهٔ ۵

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$
$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$
$$۱A=A$$

بر طبق تعریفی که در بخش ۱.۲ عرضه شد، مـاتریس $n\times ۱$ یک بـردار ستونی است و ماتریس $۱\times n$ یک بردار سطری.

تمرینات

۱. ماتریسهای زیر را به صورت‌آرایهٔ ماتریسی بنویسید.

(الف) $[i+j^{۲}]_{(۲۲)}$ (ب) $[ij]_{(۲۳)}$

(ج) $[i^{۲}+j^{۲}]_{(۲۳)}$ (د) $[۲i+۳j]_{(۳۳)}$

۲. عبارات زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۸ \\ ۵ & -۳ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۹ & ۰ \end{bmatrix}$

۳. فرض کنید X، A، B، و C ماتریسهایی $m \times n$ باشند. معادلهٔ

$$(X + A) + (B - C) = ۳X + ۴A$$

را نسبت به X و برحسب A، B، و C حل کنید.

۴. قوانین جمع ماتریسها و ضرب اسکالر آنها (گزاره‌های ۲ـ۵) را، که در متن اثبات نشدند، ثابت کنید.

۵. اگر A، B، X، و Y ماتریسهایی $m \times n$ باشند، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} ۲X + ۳Y &= A \\ X + ۲Y &= B \end{aligned}$$

را حل کنیدو X و Y را برحسب A و B بیابید.

۶. نشان دهید که ماتریسهای ۲ × ۲ای مانند X، Y، و Z، که لااقل یکی ازآنها صفر نیست، وجود دارند که درمعادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} a_{۱۱}X + a_{۱۲}Y + a_{۱۳}Z &= ۰ \\ a_{۲۱}X + a_{۲۲}Y + a_{۲۳}Z &= ۰ \end{aligned}$$

در این معادلات a_{ij}ها اعداد حقیقی دلخواه‌اند.

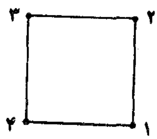
۷. چند ماتریس ۳ × ۲ وجود دارند که همهٔ درایه‌هایشان ۰ یا ۱ است؟

۸. برای ماتریس ۲ × ۲ای مانند A، نشان دهید که اعداد a، b، c، و d وجود دارند به طوری که

(الف) $A = a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

(ب) $A = a\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

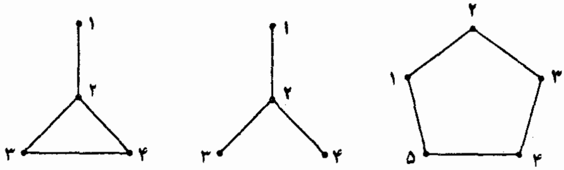
۹. اضلاع مربع زیر به طول واحدند.



با این نمادگذاری، فرض کنید a_{ij} فاصلهٔ بین i و j باشد. ماتریس فواصل، $A = [a_{ij}]_{(44)}$ را تشکیل دهید.

۱۰. چهار نقطه از صفحه با $P_1 = (1, 1)$، $P_2 = (0, 2)$، $P_3 = (-1, 0)$، و $P_4 = (0, -1)$ داده شده‌اند. ماتریس A را، که درایهٔ (i, j) آن فاصلهٔ P_i تا P_j است تشکیل دهید.

۱۱. نگار، مجموعه‌ای است از نقاطی که با خطوط معینی به هم وصل شده‌اند. اشکال زیر مثالهایی از نگار هستند.



نقاط نگار را اغلب رأس می‌نامند. به نگاری که دارای k رأس باشد، ماتریس $k \times k$ای مانند A نسبت می‌دهیم که آن را ماتریس برخورد نگار گوییم. درایه های a_{ij} ماتریس طبق این قاعده داده می‌شوند که $a_{ij} = 0$ اگر i و j به هم وصل نباشد، و $a_{ij} = 1$ اگر i به j وصل باشد.

لذا، درمورد نگار اول، ماتریس برخورد عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که طبق قرارداد، $a_{ii} = 0$. ماتریس برخورد دونگار دیگر را بیابید.

۱۲. فرض کنید A، B، C، و D چهار واحد طول باشند. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین، یک واحد از A شش واحد از C است، یک واحد از B هشت واحد از D است، و یک واحد از C نصف واحد از B است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید وشرح دهید که چرا $a_{ij}\,a_{jk} = a_{ik}$.

۴ ضرب ماتریسها

علاوه براعمال جمع و ضرب اسکالری که در مورد ماتریسها تعریف شد، عمل جبری سومی بنام ضرب ماتریسی وجود دارد که اغلب با آن روبرو می‌شویم.

گیریم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ یک ماتریس $m \times n$ و $B = [b_{ij}]_{(np)}$ یک ماتریس $n \times p$ باشد. حاصلضرب A و B، ماتریس $m \times p$ ای مانند AB است که به صورت

$$AB = \left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{(mp)}$$

تعریف می‌شود.

درحالت ۲ × ۲، این تعریف به صورت واضحتری درمی آید:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} b_{۱۱} + a_{۱۲} b_{۲۱} & a_{۱۱} b_{۱۲} + a_{۱۲} b_{۲۲} \\ a_{۲۱} b_{۱۱} + a_{۲۲} b_{۲۱} & a_{۲۱} b_{۱۲} + a_{۲۲} b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

توجه داریم که جهت یافتن درایهٔ (i, k) ماتریس حاصلضرب، در طول سطر i ام ماتریس اول و درعمق ستون k ام ماتریس دوم پیش می‌رویم.

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{bmatrix} & & \vdots & \\ a_{i۱} & \underset{\longrightarrow}{a_{i۲}} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{array}{c} k \\ \begin{bmatrix} & b_{۱k} & \\ & b_{۲k} & \\ \cdots & \downarrow & \cdots \\ & \vdots & \\ & b_{nk} & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۶ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۳ \times ۴ + ۱ \times ۳ + (-۲) \times ۱ & ۳ \times ۷ + ۱ \times ۰ + (-۲) \times ۲ \\ ۶ \times ۴ + ۳ \times ۳ + ۴ \times ۱ & ۶ \times ۷ + ۳ \times ۰ + ۴ \times ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۷ \\ ۳۷ & ۵۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۷ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۷ \\ -۲ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱\times(-۱)+۰\times(-۲)+۷\times۰ & ۱\times۳+۰\times۱+۷\times۲ & ۱\times۷+۰\times۶+۷\times۸ \\ ۰\times(-۱)+۳\times(-۲)+۱\times۰ & ۰\times۳+۳\times۱+۱\times۲ & ۰\times۷+۳\times۶+۱\times۸ \\ ۲\times(-۱)+۴\times(-۲)+۶\times۰ & ۲\times۳+۴\times۱+۶\times۲ & ۲\times۷+۴\times۶+۶\times۸ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۱۷ & ۶۳ \\ -۶ & ۵ & ۲۶ \\ -۱۰ & ۲۲ & ۸۶ \end{bmatrix}$$

در بارهٔ تعداد سطرها و ستونهای ماتریسهای A و B، در تشکیل ماتریس حاصلضرب آنها، دو موضوع ارزش به خاطر سپردن دارند. اول، به منظور این که ماتریس حاصلضرب AB تعریف شود باید تعداد ستونهای A برابر با تعداد سطرهای B باشد. دوم، تعداد سطرهای حاصلضرب AB با تعداد سطرهای A و تعداد ستونهایش با تعداد ستونهای B برابر است.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه ضرب ماتریسها ممکن است در یک مبحث زیست‌شناسی پیش‌آید.

مثال ۱ در یک ناحیه، دونوع جانور گوشتخوار $C_۱$ و $C_۲$ و دونوع جانور گیاهخوار $H_۱$ و $H_۲$ که جانوران گوشتخوار از آنها تغذیه می‌کنند، وجود دارد. گیاهخواران از سه نوع گیاه $P_۱$، $P_۲$، و $P_۳$ تغذیه می‌کنند.

ماتریس زیر مقدار گیاه از هر نوع را که یک گیاهخوار متوسط در یک روز می‌خورد، برحسب گرم مشخص می‌کند.

$$\begin{array}{c} \\ H_۱ \\ H_۲ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_۱ & P_۲ & P_۳ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۳۵۰ & ۱۵۰ \\ ۳۰۰ & ۱۵۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} \end{array} = A$$

پس، یک عضو نوعی $H_۲$ مقدار ۱۵۰ گرم از $P_۲$ را دریک روز مصرف می‌کند.

ماتریس دیگری تعداد گیاهخوارانی را که یک گوشتخوار متوسط در یک روز می‌خورد، مشخص می‌نماید.

$$\begin{array}{c} \\ C_۱ \\ C_۲ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} H_۱ & H_۲ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \end{array} = B$$

لذا، یک عضو متوسط $C_۲$، چهار عضو از $H_۱$ و دوعضو از $H_۲$ را در یک روز می‌خورد.

می‌خواهیم تعیین‌کنیم که هرگوشتخوار چند گرم از هرنوع گیاه را به طور غیرمستقیم دریک روز مصرف می‌کند.

برای مثال، یک عضو از $C_۱$، چند گرم از $P_۱$ را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند؟ اولاً، یک‌عضو $C_۱$، سه‌عضو $H_۱$ را می‌خورد. هرعضو $H_۱$، ۲۰۰ گرم از $P_۱$ را می‌خورد. لذا، باخوردن اعضای $H_۱$، یک عضو از $C_۱$ به طور غیرمستقیم ۲۰۰×۳ گرم از $P_۱$ را مصرف می‌کند. همچنین یک عضو $C_۱$، یک عضو از $H_۲$ را می‌خورد و این دومی، ۳۰۰ گرم از $P_۱$ را. پس از این منبع، یک عضو $C_۱$ به طور غیرمستقیم ۳۰۰×۱ گرم از $P_۱$ را مصرف می‌کند. پس، رویهمرفته یک عضو از $C_۱$، $۳۰۰ \times ۱ + ۲۰۰ \times ۳$ گرم از $P_۱$ را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که این عدد همان درایهٔ (۱ و ۱) ماتریس حاصلضرب BA است. همین طور، درایهٔ (۲ و ۱) آن مقداری از $P_۲$ برحسب گرم است که یک عضو از $C_۱$ به طور غیرمستقیم می‌خورد، و به همین ترتیب.

حاصلضرب BA را حساب می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۳۵۰ & ۱۵۰ \\ ۳۰۰ & ۱۵۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹۰۰ & ۱۲۰۰ & ۶۵۰ \\ ۱۴۰۰ & ۱۷۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$$

ازاینجا، اطلاعات مطلوب را می‌توانیم بخوانیم. برای مثال، هرعضو از $C_۲$ به‌طور غیرمستقیم ۱۰۰۰ گرم از $P_۲$ را مصرف می‌کند.

چندقانون جبری مربوط به ضرب‌ماتریسها وجود داردکه اینک آنها را بیان می‌کنیم.

گزارهٔ ۱ اگـر A یک ماتریس $m \times n$، B یک ماتریس $n \times p$، و C یک ماتریس $p \times q$ باشد، آنگاه $(AB)C = A(BC)$. (قانون انجمنی درمورد ضرب ماتریسها.)

اثبات گیریم

$$A = [a_{ij}]_{(mn)}،\quad B = [b_{jk}]_{(np)}،\quad و\quad C = [c_{kl}]_{(pq)}.$$

دراین صورت

$$AB = \left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]_{(mp)}$$

$$(AB)(C) = \left[\sum_{k=۱}^{p} \left(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) c_{kl}\right]_{(mq)}$$
$$= \left[\sum_{k=۱}^{p} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\right]_{(mq)}$$

$$BC = \left[\sum_{k=۱}^{p} b_{jk} c_{kl}\right]_{(nq)}$$

$$A(BC) = \left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=۱}^{p} b_{jk} c_{kl}\right)\right]_{(mq)}$$
$$= \left[\sum_{j=۱}^{n} \sum_{k=۱}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\right]_{(mq)}$$

چون $\sum_{j=۱}^{n} \sum_{k=۱}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{k=۱}^{p} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}$، داریم $(AB)C = A(BC)$. ●

مثلاً،

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۱۱ \\ ۳ & -۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & -۶ & -۳ \\ ۶ & ۱۴ & ۷ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۱۱ \\ ۳ & -۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

همچنین می‌توانیم قوانین توزیعپذیری را درمورد ضرب ماتریسها ثابت کنیم.

گزارهٔ ۲ $A(B+C) = AB + AC$ و $(A+B)C = AC + BC$.

اثبات گیریم

$A = [a_{ij}]_{(mn)}$، $B = [b_{jk}]_{(np)}$، و $C = [c_{jk}]_{(np)}$.

در این صورت

$$B + C = [b_{jk} + c_{jk}]_{(np)}$$

$$A(B+C) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) \right]_{(mp)}$$

$$AC = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} \right]_{(mp)} \text{ و } AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{(mp)}$$

$$AB + AC = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} \right]_{(mp)}$$

چون $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$، داریم $A(B+C) = AB + AC$. اثبات قانون دیگر توزیعپذیری را به عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. ●

دو قانون اخیر نشان می‌دهند که ضرب ماتریسها تا حدی مانند ضرب اسکالرها رفتار می‌کند. معهذا تفاوتهای بسیاری بین آنها وجود دارد.

مثلاً، در حالت کلی چنین **نیست** که $AB = BA$. اگر A را یک ماتریس $m \times n$ و B را یک ماتریس $n \times p$ بگیریم، این مطلب بسادگی دیده می‌شود. برای این که BA تعریف شود، باید داشته باشیم $m = p$. لذا، AB را می‌توان تعریف کرد ولی احتمالاً BA را نمی‌توان. بعلاوه، حتی اگر A و B هردو ماتریس مربعی با مرتبهٔ n باشند، که در این حالت BA و AB هر دو تعریف شده‌اند، باز هم $AB = BA$ لزوماً برقرار نیست. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

به زبان ریاضی می‌گوییم که درحالت کلی ضرب ماتریسها غیرجابجایی است. در حالتی که AB و BA هر دو تعریف شده باشند و $AB = BA$، می‌گوییم که A و B جابجا می‌شوند.

مثال زیر، به صورتی تجربی، نشان می‌دهد که چرا در حالت کلی ماتریسها جابجا نمی‌شوند.

مثال ۲ سه لولهٔ آزمایش با اندازه‌های یکسان، روی یک میز قرار دارند. مقدار آب داخل لوله‌های آزمایش با بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ داده شده است. لذا، درلولهٔ اول x_1 واحد ازآب موجود است و به همین ترتیب.

یک عمل دومرحله‌ای روی دولولهٔ آزمایش انجام می‌شود.

(۱) مقدار آب رادر دولولهٔ اولی تنظیم می‌کنیم به‌طوری که سطح آب دراین دولوله یکسان شود. سومی را به حال خود می‌گذاریم.

(۲) مقدار آب را در لوله‌های دوم و سوم تنظیم می‌کنیم به طوری که سطح آب درهر دولوله یکسان شود. لولهٔ اول را به حال خود می‌گذاریم.

پس از اینکه مرحلهٔ اول انجام شد، سطح آب در لوله‌های آزمایش با بردار $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ x_3 \end{bmatrix}$ مشخص می‌شود. اثر انجام مرحلهٔ اول عمل روی بردار $\mathbf{v}$ را می‌توان با ضرب $\mathbf{v}$ دریک ماتریس مناسب به دست آورد. درحقیقت، اگر $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، آنگاه $A_1\mathbf{v}$ بردار سطح آب پس از انجام مرحلهٔ اول است. به عبارت دیگر، ضرب A_1 در $\mathbf{v}$، به همان صورتی بر $\mathbf{v}$ اثر می‌کند که انجام مرحلهٔ اول برسطح آب لوله‌ها.

مرحلهٔ دوم را نیزمی‌توان باضرب ماتریسی بیان‌کرد. گیریم $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. در این صورت‌ضرب A_2 دربردار سطح آب، دقیقاً همان تأثیری را براین بردار دارد که انجام مرحلهٔ دوم روی سطح آب لوله‌ها. لذا، بردار سطح آب، پس از انجام مرحلهٔ اول، $A_1\mathbf{v}$ و پس از انجام هر دو مرحلهٔ $A_2A_1\mathbf{v}$ می‌باشد. با محاسبهٔ حاصلضرب ماتریسی، داریم

$$A_2A_1\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، تأثیر کل عمل روی بردار سطح آب را

می‌توان ازضرب آن بردار در A_2A_1 به دست آورد.

لکن، اکنون فرض می‌کنیم این مراحل بترتیب عکس انجام شوند. در این صورت بردار سطح آب لوله ها،

$$A_1A_2\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

است. مشاهده می‌کنیم که $A_1A_2\neq A_2A_1$. این بدان معنی است که اگر ترتیب انجام مراحل تفاوت کند، نتیجه نیز فرق خواهد کرد. به عنوان یک مثال مشخص، فرض می‌کنیم $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}4\\8\\4\end{bmatrix}$، دراین صورت $A_2A_1\mathbf{v}=\begin{bmatrix}6\\5\\5\end{bmatrix}$ ولی $A_1A_2\mathbf{v}=\begin{bmatrix}5\\5\\6\end{bmatrix}$. بنابراین، در این حالت غیرجابجایی بودن تعبیر ملموسی دارد.

مورد برجستهٔ دیگری که در آن ضرب ماتریسها متفاوت با ضرب اسکالر است، نقض قانون حذف است: ممکن است داشته باشیم $AB=AC$ و $A\neq 0$ بدون اینکه $B=C$. به عنوان مثال،

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

همچنین ممکن است داشته باشیم $AB=0$ درحالی که $A\neq 0$ و $B\neq 0$. مثلاً

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

نقض قانون حذف را با استفاده از دو مرحلهٔ مثال ۲ تشریح می‌کنیم. فرض می‌کنیم سطح اولیهٔ آب با $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}4\\8\\4\end{bmatrix}$ داده شده باشد. پس با انجام مراحل ۱ و ۲ حاصل می‌شود $A_2A_1\mathbf{v}=\begin{bmatrix}6\\5\\5\end{bmatrix}$. اکنون فرض می‌کنیم سطح اولیه آب با $\mathbf{v}'=\begin{bmatrix}8\\4\\4\end{bmatrix}$ داده شده است. در این صورت $A_2A_1\mathbf{v}'=\begin{bmatrix}6\\5\\5\end{bmatrix}$. لذا، با هریک ازاین دو توزیع اولیه، حاصل نهایی یکی است. اگراین مطلب را به‌صورت حاصلضربهای‌ماتریسی بنویسیم،داریم $A_2A_1\mathbf{v}=A_2A_1\mathbf{v}'$، ولی $\mathbf{v}'\neq\mathbf{v}$. دراین حالت توجه به این نکته جالب است که انجام مرحلهٔ اول، تأثیر یکسانی بر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ دارد.

تمرینات

۱. حاصلضربهای ماتریسی زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}۸\\ ۲\\ ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۲\end{bmatrix}$

(ه) $\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۴\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$

۲. اگر

$A = \begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، $I = \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$، و $D = \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$

ماتریسهای زیر را حساب کنید.

(الف) AB (ب) $(AB)C$ (ج) BC (د) $A(BC)$ (ه) BA (و) $AB - BA$
(ز) IA (ح) AI (ط) IB (ی) BI (ک) BD (ل) DB (م) CC

۳. ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ -۱\end{bmatrix}$ را بیابید.

۴. فرض کنید A و B دو ماتریس باشند. فرض کنید که AB و BA تعریف شده باشند و $AB = BA$. نشان دهید که A و B ماتریسهای مربعی با مرتبهٔ یکسان هستند.

۵. اگر B یک ماتریس باشد، نشان دهید که $B \times ۰ = ۰ \times B = ۰$.

۶. فرض کنید A یک ماتریس ۲ × ۲ و C یک ماتریس ۴ × ۴ باشد. فرض کنید B ماتریس دیگری باشد که برای‌آن حاصلضرب $(AB)C$ تعریف شده است. مرتبهٔ B چیست؟

۷. قانون توزیعپذیری ضرب ماتریسها، $(A + B)C = AC + BC$، را ثابت کنید.

۸. اگر $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$؛ a، b، c، و d را بیابید.

۹. اگر B یک ماتریس ۲ × ۲ باشد به‌طوری که $\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix} B = ۰$، نشان دهید که اعداد a و b وجود دارند به‌طوری که $B = \begin{bmatrix}a & b\\ a & b\end{bmatrix}$.

۱۰. نشان دهید که ماتریس ۲ × ۲ ای مانند A فقط و فقط وقتی با ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

جابجا می‌شود که اعداد a و b وجود داشته باشند به‌طوری که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{bmatrix}$.

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$، یک بردار ستونی غیر صفر $\mathbf{x}$ بیابید به‌طوری که $A\mathbf{x} = ۰$. یک بردار سطری غیرصفر $\mathbf{y}$ بیابید به‌طوری که $\mathbf{y}A = ۰$.

۱۲. اگر A و B دوماتریس ۲ × ۲ باشند که حاصلجمع درایه‌های هرستون آنها برابر ۱ است، نشان دهید که حاصلجمع درایه‌های هرستون AB برابر ۱ می‌باشد.

۱۳. اگر X یک ماتریس ۲ × ۲ باشد به‌طوری که $X \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = ۰$، نشان دهید که $X = ۰$.

۱۴. دردانشکده‌ای، تعداد دانشجویان دورهٔ لیسانس وفوق‌لیسانس، پسر ودختر، با ماتریس

$$A = \begin{array}{r c} & \text{فوق لیسانس} \quad\quad \text{لیسانس} \\ \begin{array}{r}\text{پسر}\\ \text{دختر}\end{array} & \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۱۰۰ \\ ۱۸۰ & ۸۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. بنابراین، برای مثال، ۱۰۰ نفر دانشجوی پسر فوق لیسانس وجود دارد. مخارج شهریه، منزل، وغذا برای دانشجویان دورهٔ لیسانس و فوق لیسانس با ماتریس

$$B = \begin{array}{r c} & \text{شهریه} \quad\quad \text{منزل} \quad\quad \text{غذا} \\ \begin{array}{r}\text{لیسانس}\\ \text{فوق لیسانس}\end{array} & \begin{bmatrix} ۵۰۰ & ۸۰۰ & ۸۰۰ \\ ۸۰۰ & ۱۰۰۰ & ۸۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. ماتریس AB را حساب کنید و توضیح دهید که درایه‌های AB چه معنی دارند.

۱۵. کارخانه‌داری سه محصول A، B، و C را در دو بازار M و N می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته شدهٔ هرمحصول درهر بازار دریک سال معین با ماتریس

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۳۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

داده شده است. ماتریسهای

$$S_۲ = \begin{bmatrix} ۱٫۸۰ \\ ۳٫۵۰ \\ ۲٫۵۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S_۱ = \begin{bmatrix} ۲٫۰۰ \\ ۴٫۰۰ \\ ۳٫۰۰ \end{bmatrix}$$

بترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شدهٔ هرواحد از A، B، و C را می‌دهند. درایه‌های هریک از ماتریسهای $TS_۱$، $TS_۲$، و $TS_۱ - TS_۲$ را تعبیر کنید.

۱۶. کارخانه‌داری که درمسئلهٔ قبلی توصیف شد، درمی‌یابد که پنج سال‌بعد فروش دربازار

M، ۵۰٪ و در بازار N، ۴۰٪ افزایش یافته است. ماتریس 2×2 ای مانند B تشکیل دهید به طوری که حاصلضرب ماتریسی BT، تعداد واحد از هر محصول را که بعداً در هر بازار فروخته شده است، بدهد.

۱۷. فرض کنید A، B، و C ماتریسهایی $n \times n$ باشند. اگر A با C، و B با C جابجا شود، نشان دهید که AB با C جابجا می‌شود.

۱۸. فرض کنید A و B دوماتریس 2×2 باشند. اگر A و B با $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ جابجا شوند، نشان دهید که A با B جابجا می‌شود.

۱۹. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد و

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}\right\} i \\ \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \end{array}$$

نمایشگر n-بردار ستونیی باشد که همهٔ مؤلفه‌هایش بجز مؤلفهٔ i ام آن صفرند و مؤلفهٔ iام آن ۱ است. نشان دهید که $A\mathbf{e}_i$ ستون i ام ماتریس A است.

۲۰. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. اگر به ازای هربردار $\mathbf{x}$، $A\mathbf{x} = 0$، نشان دهید که $A = 0$. [راهنمایی: ر.ک. تمرین ۱۹.]

۵ ماتریسهای مربعی

ماتریسهای مربعی ازمرتبهٔ یکسان، خواصی دارند که سبب می‌شود موضوعات جالبی برای مطالعه باشند. برای‌مثال، فرض می‌کنیم A و B هردو مربعی و ازمرتبهٔ یکسان باشند. آنگاه، همهٔ حاصلضربهای AA، BB، AB، و BA، طبق تعریف بامعنی‌اند. همان طور که بعداً در این بخش خواهیم دید، می‌توانیم توانها وچند جمله‌ایها را نیز درمورد ماتریسهای A و B تعریف کنیم.

ابتدا ماتریس همانی با مرتبهٔ n را بررسی خواهیم کرد. این ماتریس همان نقشی را درضرب ماتریسهای با مرتبهٔ n دارد که ۱ درضرب اعداد.

تابع **دلتای کرونکر** δ_{ij} را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{اگر} \quad i = j$$
$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{اگر} \quad i \neq j$$

برای مثال، $\delta_{23} = 0$، $\delta_{11} = 1$، $\delta_{33} = 1$، $\delta_{45} = 0$.

با استفاده ازاین نماد، ماتریس I_n را به‌صورت $I_n = [\delta_{ij}]_{(nn)}$، که ماتریسی $n \times n$ است تعریف می‌کنیم. درایه‌های قطری این ماتریس ۱ هستند ودرایه‌های غیرقطریش‌صفرند. برای مثال،

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

ماتریس I_n را **ماتریس همانی با مرتبهٔ** n گویند.

قضیهٔ ۱ اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، $AI_n = I_n A = A$.

اثبات گیریم $A = [a_{ij}]_{(nn)}$. دراین صورت

$$AI_n = \left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} \delta_{jk} \right]_{(nn)} = [a_{ij}]_{(nn)}$$

چون در حاصلجمع $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} \delta_{jk}$ داریم $a_{ij} \delta_{jk} = ۰$ مگر اینکه $k = j$ و دراین‌صورت $a_{ij} \delta_{kk} = a_{ij}$؛ لذا، $AI_n = A$. به روشی مشابه، $I_n A = A$. ●

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

اگر α اسکالرباشد، ماتریسی به صورت αI_n را **ماتریس اسکالر** گویند. این ماتریس را می‌توان به عنوان ماتریسی توصیف کرد کـه درایه‌های قطری‌آن همگی α، و درایه‌های غیر قطریش همگی صفرند.

درکار با ماتریسها، مفهوم وارون ماتریس از اهمیت زیادی برخوردار است. اگر A ماتریسی $m \times m$ باشد و ماتریسی $m \times m$ مـانند B وجـود داشته باشد به‌طوری کـه $AB = BA = I_m$، A را **وارون‌پذیر** و B را **وارون** A می‌نامند.

با بیان این‌تعریف، اولین سؤالی که طبیعتاً پیش می‌آید، آن است که‌آیا یک ماتریس A می‌تواند دارای دو وارون متفاوت‌باشد؟ قضیهٔ ۲ نشان می‌دهدکه چنین‌چیزی ممکن‌نیست.

قضیهٔ ۲ گیریم A ماتریسی $m \times m$ و B وارون A باشد. اگر C ماتریس دیگری بـاشد به‌طوری که $AC = CA = I_m$، آنگاه $C = B$.

اثبات بنا به فـرض قضیه، می‌دانیم $AB = BA = I_m$ و $AC = CA = I_m$. در نتیجه $C = CI_m = C(AB) = (CA)B = I_m B = B$. ●

لذا، اگر ماتریسی دارای وارون باشد، فقط یک وارون دارد. اگر A دارای وارون باشد، آن را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم و A را **وارون‌پذیر** می‌نامیم. برای مثال،

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۷ & ۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۱ & -۳ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۱۱ & -۳ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۷ & ۱۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۷ & ۱۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱۱ & -۳ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

در فصل مربوط به دترمینانها، شرطی لازم و کافی برای اینکه ماتریسی وارون داشته باشد خواهیم یافت. دراینجا فقط به ذکرچند مثال می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم‌که چگونه ازطریق حل دستگاههای معادلات خطی، وارون ماتریس به دست می‌آید.

مثال ۱ وارون $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را، در صورت وجود، می‌یابیم. این ماتریس را A می‌نامیم. می‌خواهیم ماتریس B را بیابیم به طوری که $AB = BA = I_۲$. گیریم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. چون $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، دستگاه معادلات خطی زیر را برای a، b، c، و d به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} ۳a + ۵c &= ۱ \qquad & ۳b + ۵d &= ۰ \\ a + ۲c &= ۰ \qquad & b + ۲d &= ۱ \end{aligned}$$

با حل این دستگاه، به روش فصل اول، به دست می‌آوریم $a = ۲$، $b = -۵$، $c = -۱$، و $d = ۳$. با قرار دادن این مقادیر عددی در B، می‌توان ثابت کرد که $AB = BA = I_۲$. لذا
$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حال یک مثال از ماتریسی می‌آوریم که وارون نداشته باشد.

مثال ۲ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ وارون ندارد. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون A باشد. دراین صورت $BA = I_۲$. ولی

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & a+b \\ ۰ & c+d \end{bmatrix}.$$

چون درایهٔ (۱و ۱) ماتریس $I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، برابر ۱ است، نمی‌توان B راطوری انتخاب کرد که $BA = I_۲$. لذا، A وارون ندارد.

ماتریسهایی را که وارون ندارند **وارون ناپذیر** یا **منفرد** گویند.

دربخشهای بعد، روش اصولی‌تر و منظمتری را جهت تحقیق وارون پذیری یک

ماتریس‌ویافتن وارون آن عرضه می‌کنیم. همچنین خواهیم دید که وارون، درصورت وجود، وسیلهٔ ارزشمندی برای حل دستگاههای معادلات است.

توانهای یک ماتریس مربعی A به‌طریق معمولی تعریف می‌شوند: $A^{1} = A$، $A^{2} = AA$، $A^{3} = AA^{2}$، . . .، $A^{n} = AA^{n-1}$. بنا برقانون انجمنی، A^{n} همان A است که، بدون توجه به ترتیب انجام عمل ضرب، n بار در خودش ضرب شده است. مثلاً[*]، اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، آنگاه $A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $A^{3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $A^{4} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. در این حالت، استقراء نشان خواهد داد که $A^{n} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

مثال بعدی نشان می‌دهد کـه چگونه مسئله‌ای درمطالعهٔ جمعیت حیوانات ممکن است مـا را بـه استفاده از تـوانهای ماتریسها وادارد. برای سادگی، محدودیتهایی عـددی قائل می‌شویم که ممکن است تا حدی غیر واقعی باشند، ولی بدون این محدودیتها نیز، این اصل اساسی درحالت کلی برقرار است.

مثال ۳ نوعی حیوان داریم که حداکثر چهارسال عمر می‌کند. این حیوان دوجنس نروماده دارد که نسبت جمعیت نرها به جمعیت ماده‌ها ثابت است. لـذا از نرها صرفنظر می‌کنیم و فقط جمعیت ماده‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. داده‌های زیر را داریم:

(۱) تعداد مـاده‌هـا درسنین ۰ـ۱، ۱ـ۲، ۲ـ۳، و ۳ـ۴، بترتیب، با اعـداد n_{1}، n_{2}، n_{3}، و n_{4} داده شده است. بنا براین، تعداد ماده‌ها بین سنین ۱ و ۲ عبارت است از n_{2}.

(۲) تعداد ماده‌هایی کـه دریک سال توسط یک مـادهٔ عـادی در هریک از گروههای سنی فوق به دنیا می‌آید بترتیب ۱/۱۰، ۱/۲، ۳/۴، و ۱/۴ است. لـذا، یک مادهٔ بین سنین ۲ و ۳ به‌طور متوسط ۳/۴ بچه به دنیا می‌آورد.

(۳) احتمال اینکه مادهٔ مفروضی از هرگروه سنی زنـده بماند تا به‌گروه سنی بالاتر برسد، بترتیب ۴/۵، ۳/۴، ۱/۳، و ۰ است. لذا یک حیوان ماده بین سنین ۰ و ۱ دارای شانس ۴/۵ برای زنده ماندن به مدت یک سال دیگر است. به‌عبارت دیگر، یک سال بعد، $(4/5)n_{1}$ از اعضای گـروه سنی اول هنوز زنده‌اند.

با استفاده از این داده‌ها می‌خواهیم جمعیت ماده‌ها را پس از یک سال، دو سال، و غیره پیش‌بینی کنـیم. این را بـا بـردار $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} n_{1} \\ n_{2} \\ n_{3} \\ n_{4} \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم.

همچنین ماتریس

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که جمعیت ماده‌ها در گروههای سنی متفاوت دریک سال بعد با بردار

$$T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}n_1 + \frac{1}{2}n_2 + \frac{3}{4}n_3 + \frac{1}{4}n_4 \\ \frac{4}{5}n_1 \\ \frac{3}{4}n_2 \\ \frac{1}{3}n_3 \end{bmatrix}$$

معین می‌شود.

برای ملاحظهٔ این مطلب، اول تعداد ماده‌های بین سنین ۰ و ۱ را دریک سال بعد حساب می‌کنیم. البته، این فقط تعداد ماده‌های متولد شده در یک سال است. حال n_1 ماده از گروه سنی اول وجود دارد وهریک به‌طور متوسط ۱۰/۱ بچهٔ ماده تولید می‌کند. لذا، اولین گروه سنی رویهمرفته $n_1(1/10)$ مادهٔ جدید تولید می‌کند. گروه سنی دوم، جمعاً $n_2(1/2)$، گروه سنی‌سوم $n_3(3/4)$، وگروه سنی‌چهارم $n_4(1/4)$ مادهٔجدید تولیدمی‌کند. درنتیجه، تعداد ماده‌های جدید، ازجمع این چهار عدد به دست می‌آید و درحقیقت اولین درایهٔ بردار فوق است.

درایه‌های دیگر حتی ازاین هم ساده‌ترند. به یاد آورید که پس از یک سال، ۵/۴ ماده‌های گروه سنی اول زنده هستند. لذا، پس از یک سال تعداد ماده‌ها در گروه سنی دوم $n_1(4/5)$است. بقیهٔ اعداد به طریق مشابه به دست می‌آیند.

بنابراین، بردار جمعیت پس ازیک سال با فرمول $T\mathbf{P}$ داده می‌شود. پس از دوسال، این فرمول $T^2\mathbf{P}$، پس از سه سال، $T^3\mathbf{P}$، وغیره می‌باشد.

جالب‌توجه استکه اگرجمعیت درابتدا با $\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 600 \\ 200 \end{bmatrix}$ داده شده‌باشد، آنگاه $T\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0$. یعنی، جمعیت ازسالی به سال دیگر ثابت می‌ماند.

در اینجا چند جمله‌ایهای ماتریسی را نیز می‌توان بررسی کرد. اگر

$$f(x) = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_n x^n$$

یک چند جمله‌ای باشد، $f(A)$ را به صورت $f(A) = \alpha_۰ I_n + \alpha_۱ A + \cdots + \alpha_n A^n$ تعریف می‌کنیم. لذا، مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $f(x) = ۱ + x + ۲x^۲$،

$$f(A) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

اگر $f(x) = x^۲ - ۲x + ۱$،

$$f(A) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربعی را ماتریس **قطری** گوییم اگر همهٔ درایه‌های غیر قطری آن صفر باشند. برای مثال، ماتریسهای زیر قطری هستند.

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -۷ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، نشان دهید که $AI_n = A$ و $I_m A = A$.

۲. صحت هریک از تساویهای زیر را بررسی کنید.

(الف) $$\begin{bmatrix} ۶ & ۷ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۶ & -۷ \\ -۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

(ج) $$\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۸ \\ ۲ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} -۳۱ & -۲ & ۴۷ \\ ۱۶ & ۱ & -۲۴ \\ -۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

(د) $$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} -۱۰ & ۴ & ۹ \\ ۱۵ & -۴ & -۱۴ \\ -۵ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$A^۲$ و $A^۳$ را حساب کنید. نشان دهید که A وارون پذیر است و $A^{-۱} = A^۲$.

۴. در هریک ازحالات زیر $f(A)$ را حساب کنید.

(الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $f(x) = ۱ + ۳x + x^۲$.

(ب) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $f(x) = x + x^۲$.

(ج) $A = \begin{bmatrix} d_۱ & ۰ \\ ۰ & d_۲ \end{bmatrix}$ و $f(x) = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \alpha_۲ x^۲$.

(د) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $f(x) = x^۳ - x^۲ - x + ۱$.

(ه) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $f(x) = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_n x^n$.

۵. با استقراء یا روش دیگری، نشان دهیدکه

$$\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ۱ & nx & ny + \frac{n(n-۱)}{۲}x^۲ \\ ۰ & ۱ & nx \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۶. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۵ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، نشان دهید که $A^۳ = ۵I_۳$. ماتریس $A^{-۱}$ چیست؟

۷. همهٔ ماتریسهای قطری A را بیابید که ۳ × ۳ هستند و $A^۲ = I_۳$.

۸. فرض کنید $P_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$، که در آن t یک‌عدد حقیقی است. نشان دهید

(الف) $P_t P_s = P_{t+s}$، (ب) $(P_t)^n = P_{nt}$ برای هرعدد صحیح n،

(ج) $(P_t)^{-۱} = P_{-t}$.

۹. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و p و q اعداد صحیح مثبت باشند، ثابت کنید که

$$A^p A^q = A^{p+q} \quad \text{و} \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

۱۰. فرض کنید A یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ باشد. فرض کنید B ماتریسی $n \times p$ باشد به‌طوری که $AB = ۰$. نشان دهید که $B = ۰$.

۱۱. با یافتن بردارهای غیرصفر $\mathbf{x}$ به‌طوری که $A\mathbf{x} = ۰$، نشان دهید که ماتریسهای زیر منفردند.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۷ & -۱۴ \end{bmatrix}$، (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$.

(توجه کنیدکه اگر $\mathbf{x}$ پیدا شود، تمرین ۱۰ وارون ناپذیری ماتریسها را تضمین می‌کند.)

۱۲. ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq ۰$. چنانچه $ad - bc \neq ۰$، فرمولی برای $A^{-۱}$ پیدا کنید.

۱۳. یک ماتریس $n \times n$ راماتریس‌مربعی نیم‌جادویی گویند اگرحاصلجمع درایه‌های همهٔ سطرها و ستونهای آن یکسان باشد. برای مثال، $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی نیم‌جادویی است. فرض کنید A و B ماتریسهای مربعی نیم جادویی با اندازهٔ یکسان باشند. نشان دهید که $aA + bB$ و AB به ازای هر دوعدد حقیقی a و b، ماتریسهای مربعی نیم‌جادویی هستند.

۱۴. فرض‌کنید A و B دوماتریس دلخواه $n \times n$ و C یک‌ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشند. ثابت کنید که $C^{-۱}(AB)C = (C^{-۱}AC)(C^{-۱}BC)$ وبرای هرعدد صحیح مثبت k، $C^{-۱}(A^k)C = (C^{-۱}AC)^k$.

۱۵. محصول معینی توسط دو شرکت رقیب A و B، که بازار را به طور کامل در دست دارند، تولید می‌شود. هرسال شرکت A، ۱/۳ مشتریان خود را حفظ می‌کند و ۲/۳ آنها به B روی می‌آورند. هرسال ۱/۲ ازمشتریان B برای B باقی می‌مانند و ۱/۲ بقیه مشتری A می‌شوند. این موضوع را با ماتریس $T = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ بیان می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{v}_۰ = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ توزیع اولیهٔ بازار را نشان دهد. (برای مثال، $a = \frac{۲}{۵}$ و $b = \frac{۳}{۵}$، اگر $\frac{۲}{۵}$ بازار در دست A و ۳/۵ آن در دست B باشد.)

(الف) نشان دهید که $\mathbf{v}_۱ = T\mathbf{v}_۰$ توزیع بازار در یک سال بعد است. نشان دهید که توزیع بازار پس از k سال، $\mathbf{v}_k = T^k\mathbf{v}_۰$ است.

(ب) اگر $a = ۳/۷$ و $b = ۴/۷$،نشان دهید که بازار پایدار است یعنی، ازسالی به سال دیگر تغییر نمی‌کند.

(ج) اگر $\mathbf{v}_۰$ یک توزیع پایدار باشد، نشان دهید که $a = ۳/۷$ و $b = ۴/۷$.

(اگر $\mathbf{v}_۰$ پایدار باشد، $T\mathbf{v}_۰ = \mathbf{v}_۰$. همچنین بنا به تعریف $\mathbf{v}_۰$، $a + b = ۱$.)

۱۶. در مسئلهٔ قبلی، اگر $\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} = T$، وضع پایدار را بیابید.

۱۷. دومثال اخیر، مثالهایی ازفرایندهای مارکوف هستند. یک اصل‌اساسی درمطالعهٔ این فرایندها می‌گوید که آنها، صرفنظر ازنقطهٔ آغاز خود، سرانجام به سمت وضع پایدار میل می‌کنند. دراینجا طرح مختصری از اثبات این مطلب را برای تمرین ۱۵ ارائه می‌کنیم.

(الف) اگر $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$، نشان دهید که $C^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

(ب) نشان دهید که $C^{-۱}TC = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۶} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C^{-۱}T^kC = \begin{bmatrix} \left(-\frac{۱}{۶}\right)^k & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

(ج) نشان دهید که $T^k = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} + \frac{۱}{۷}\left(-\frac{۱}{۶}\right)^k \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$.

(د) نشان دهید که تفاضل $T^k\mathbf{v}_۰$ و بردار $\begin{bmatrix} \frac{۳}{۷} \\ \frac{۴}{۷} \end{bmatrix}$، برداری است که قدرمطلق مؤلفه‌های آن حداکثر $۱/۶^k$ است. (به یادآورید که $a + b = ۱$، و $a \geqslant ۰$ و $b \geqslant ۰$.)

(ه) وقتی $k \to \infty$، نشان دهید که توزیع بازار به $(۳/۷، ۴/۷)$ میل می‌کند. (درحقیقت، پس ازپنج سال تفاضل a و ۳/۷ کمتر از ۰٫۰۰۰۱۳ است.)

۱۸. سه ظرف به نامهای A، B، و C روی یک میز قرار دارند. درهر ظرف تعداد معینی گوی جای داده شده است. فرض کنید $\mathbf{v}_۰ = \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \\ n_۳ \end{bmatrix}$ برداری باشد که تعداد گویها در هر ظروف رانشان می‌دهد. لذا، $n_۱$ گوی در A، $n_۲$ گوی در B، و $n_۳$ گوی در C وجود دارد. یک عمل تغییر مکان گویها ازظرفی به ظرف دیگر انجام می‌گیرد. در هر مرحله از عمل، سه کار انجام می‌شود:

(۱) ۳/۵ گویهای A در A باقی می‌مانند، ۱/۵ آنها به B و ۱/۵ دیگر به C برده می‌شوند.

(۲) درهمان زمان، ۱/۴ گویهای B به A و ۱/۴ آنها به C منتقل می‌شوند و ۱/۲ بقیه درهمان ظرف B باقی می‌مانند.

(۳) همزمان باآن، ۱/۵ ازگویهای C در A و ۱/۵ آنها در B قرارمی‌گیرند، و ۳/۵ بقیه در C باقی می‌مانند.

(الف) یک ماتریس T بنویسید به‌طوری که $T\mathbf{v}_0$ تعداد گویها درهرظرف را پس ازاینکه عمل تغییر مکان یک بار انجام شد، معین کند.
(ب) ماتریس T^2 را تعبیر کنید.
(ج) اگر توزیع اولیهٔ گویها عبارت باشد از ۵۰، ۴۰، و ۵۰، نشان دهید که این عمل روی توزیع گویها تأثیری ندارد.

۱۹. مشاهده شده است کـه جمعیت مجتمعی از باکتریها تابع قـاعـدهٔ زیر است: میزان جمعیت در هرساعت مفروض، حاصلجمع جمعیتهای سه ساعت قبل است. اگر درساعت k ام میزان جمعیت این باکتریها p_k باشد و اگر $\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} p_{k+2} \\ p_{k+1} \\ p_k \end{bmatrix}$ جمعیت را در سه ساعت متوالی نشان دهد، یک ماتریس T بیابید به‌طوری که $\mathbf{v}_{k+1} = T(\mathbf{v}_k)$.

۲۰. اگر A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند، نشان دهیدکه $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ اگر وفقط اگر A و B باهم جابجا شوند.

۲۱. فرض کنید D یک مـاتـریس قطری ۳ × ۳ و f یک چند جمله‌ای بـاشد. اگـر $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$، نشان دهید که $f(D) = \begin{bmatrix} f(d_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(d_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(d_3) \end{bmatrix}$

۲۲. نشان دهید کـه یک ماتریس قطری وارون پذیر است اگر و فقط اگر همهٔ درایه‌های قطری آن غیرصفر باشند. وارون آن چیست؟

۲۳. نشان دهید که حاصلجمع و حاصلضرب ماتریسهای قطری، قطری است. نشان دهید که هردوماتریس قطری باهم جابجا می‌شوند.

۲۴. اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند، نشان دهید کـه AB وارون پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

۲۵. اگر A وارون‌پذیر باشد، نشان‌دهیدکه A^m نیز وارون‌پذیر است و $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$.

۲۶. ماتریس N را **پوچ توان** می‌نامیم اگر، برای یک عدد صحیح مثبت k، داشته باشیم $N^k = 0$. نشان دهید که ماتریس پوچ توان وارون پذیر نیست.

۲۷. اگر N یک ماتریس پوچ توان $n \times n$ باشد، به‌طوری کـه $N^k = 0$، نشان دهید که $I_n - N$ وارون پذیر است و

$$(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \dots + N^{k-1}$$

۲۸. با استفاده ازتمرین ۲۷، وارون هریک از ماتریسهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(\text{ج})\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (\text{د})\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۹. فرض کنید E_{ij} نشانگر ماتریسی $n \times n$ باشد که تمام درایه‌های آن بجز درایهٔ (i, j) صفر و درایهٔ (i, j) آن ۱ است.

(الف) نشان دهید که $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

(ب) اگر $j \neq i$، ثابت کنید که $E_{ij}^۲ = ۰$ و اگر $j = i$، نشان دهید که $E_{ij}^۲ = E_{ij}$.

(ج) اگر $A = [a_{ij}]_{(nn)}$، نشان دهیدکه تمام درایه‌های $E_{ij}A$، بجز درسطر i ام که همان سطر j ام A است، صفرند.

(د) نشان دهید که تمام درایه‌های AE_{ij}، بجز درستون j ام که همان ستون i ام A است، صفرند. [راهنمایی: اگر برایتان مشکل است، مسئله را در حالت ۳×۳ به‌طور مشروح بنویسید.]

۳۰. نشان دهید که یک ماتریس $n \times n$ که با همهٔ ماتریسهای $n \times n$ جابجا می‌شود، باید مضرب اسکالری از ماتریس همانی باشد. بعلاوه، نشان دهید که هرمضرب اسکالر از ماتریس همانی با همهٔ ماتریسهای $n \times n$ جابجا می‌شود. [راهنمایی: ازتمرین ۲۹ استفاده کنید.]

۳۱. اگر E_{ij}، همان طور که در تمرین ۲۹ آمده است، تعریف شود و $j \neq i$، نشان دهید که $I_n + E_{ij}$ وارون پذیر است. [راهنمایی: ازتمرین ۲۷ استفاده کنید.]

۳۲. فرض‌کنید A و B دوماتریس $n \times n$ باشند و $C_۱ = \alpha_۱ A + \beta_۱ B$ و $C_۲ = \alpha_۲ A + \beta_۲ B$؛ فرض کنید $\alpha_۱\beta_۲ - \alpha_۲\beta_۱ \neq ۰$. نشان دهید که $C_۱$ و $C_۲$ با هم جابجا می‌شوند اگر و و فقط اگر A و B با هم جابجا شوند.

۳۳. اگر A و B ماتریسهای مربعی باشند و A وارون پذیر باشد، نشان دهید که

$$(A + B)A^{-۱}(A - B) = (A - B)A^{-۱}(A + B)$$

۳۴. اگر A و B دوماتریس مربعی باشند که با هم جابجا می‌شوند، نشان دهید که A^m و B^n (m و n اعداد صحیح مثبت) با هم جابجا می‌شوند.

۳۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون پذیر باشند، نشان دهید که احکام زیر هم ارزند:

(الف) A با B جابجا می‌شود.

(ب) A با $B^{-۱}$ جابجا می‌شود.

(ج) $A^{-۱}$ با $B^{-۱}$ جابجا می‌شود.

۶ معادلات خطی به صورت ماتریسی

فرض کنیم دستگاه معادلات خطی زیر را داریم

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= y_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m
\end{aligned}$$

می‌توان این دستگاه معادلات را با استفاده از نماد ماتریسی به صورت فشرده‌تری بیان کرد. ماتریس $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ را به عنوان **ماتریس ضرایب**، بردار $\mathbf{x} = [x_j]_{(n1)}$ را به عنوان ماتریس مجهولات و بردار $\mathbf{y}$ را به صورت $\mathbf{y} = [y_i]_{(m1)}$ تعریف می‌کنیم. دستگاه فوق، با نماد ماتریسی تبدیل می‌شود به $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

برای مثال، دستگاه

$$\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}$$

تبدیل می‌شود به

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

طبق تعریفی که در بخش ۴.۱ ارائه شد، دستگاههایی را که به صورت $A\mathbf{x} = 0$ اند، همگن می‌نامند. اینک قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد که در آن $n > m$، یک n-بردار $\mathbf{x}$، $\mathbf{x} \neq 0$، وجود دارد به طوری که $A\mathbf{x} = 0$.

اثبات اگر بنویسیم

$$\begin{aligned}
A &= [a_{ij}]_{(mn)} \\
\mathbf{x} &= [x_j]_{(n1)}
\end{aligned}$$

در دستگاه معادلات خطی همگن متناظر، تعداد مجهولات بیشتر ازتعداد معادلات است و لذا بنا به قضیهٔ بخش ۴.۱، یک جواب غیربدیهی وجود دارد. ●

لذا، برای مثال، با مفروض بودن ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۸ & ۳ \\ ۴ & ۲ & -۷ & ۱ \\ -۳ & ۷ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

می‌توانیم یک ۴-بردار $\mathbf{x}$ بیابیم به‌طوری که $A\mathbf{x} = ۰$.

فرض می‌کنیم یک دستگاه n معادلهٔ n مجهولی داشته‌باشیم، که در آن ماتریس ضرایب وارون پذیر است. در این حالت می‌توانیم نشان دهیم که دستگاه جوابی یکتا دارد. دستگاه، با نماد ماتریسی تبدیل می‌شود به $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$

اگر فرض کنیم $\mathbf{x} = A^{-۱}\mathbf{y}$، داریم

$$A\mathbf{x} = A(A^{-۱}\mathbf{y}) = (AA^{-۱})\mathbf{y} = I_n\mathbf{y} = \mathbf{y}$$

لذا، دستگاه حل پذیر است. برای اینکه ببینیم جواب یکتاست، فرض می‌کنیم $\mathbf{x}_۱$ و $\mathbf{x}_۲$ دو جواب دستگاه باشند، یعنی، $A\mathbf{x}_۱ = \mathbf{y}$ و $A\mathbf{x}_۲ = \mathbf{y}$.

در این صورت، $A\mathbf{x}_۱ = A\mathbf{x}_۲$ و می‌توانیم طرفین این تساوی را در $A^{-۱}$ ضرب کنیم تا به دست آوریم

$$A^{-۱}(A\mathbf{x}_۱) = A^{-۱}(A\mathbf{x}_۲)$$

یا

$$(A^{-۱}A)\,\mathbf{x}_۱ = (A^{-۱}A)\,\mathbf{x}_۲$$

درنتیجه $\mathbf{x}_۱ = \mathbf{x}_۲$.

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۷ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

لذا، وقتی با دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_۱ + ۳x_۲ + ۳x_۳ &= y_۱ \\ x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ &= y_۲ \\ x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ &= y_۳ \end{aligned}$$

مواجه باشیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7y_1 - 3y_2 - 3y_3 \\ -y_1 + y_3 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

مزیت این جواب عمومی روشن است. اگر لازم بود مسئله را درحالتی حل کنیم که y_1، y_2، و y_3 مقادیر متفاوت زیادی را اختیار می‌کنند، فرمول فوق باعث صرفه جویی در مقداری از کار می‌شد.

تمرینات

۱. دستگاههای معادلات خطی زیر را به صورت ماتریسی تبدیل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 &= -1 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

۲. نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

و دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= y_1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= y_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

را حل کنید.

۳. نشان دهید که $\begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -19 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$، و دستگاه

$$\begin{aligned} 13x + 19y &= a \\ 2x + 3y &= b \end{aligned}$$

را حل کنید.

۴. (الف) اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد و اگـر ماتریس B، $n \times m$ وجود داشته باشد به طوری که $AB = I_m$، نشان دهید که معادلهٔ $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ همیشه حل‌پذیر است.

(ب) با استفاده از تساوی

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۸ & -۱۷ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱۷ & -۲ \\ -۸ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

جوابهای دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} -\ \ x + \ ۲y \qquad &= \alpha \\ ۸x - ۱۷y + z &= \beta \end{aligned}$$

را بیابید.

۵. اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد و $m < n$، نشان دهید که ماتریس غیر صفر $n \times p$ ای مانند B وجود دارد به طوری که $AB = ۰$.

۶. اگر A یک ماتریس $m \times n$، $\mathbf{x}$ یک n-بردار، و $\mathbf{y}_۱$ و $\mathbf{y}_۲$ دو m-بردار باشند به‌طوری که $A\mathbf{x} = \mathbf{y}_۱$ و $A\mathbf{x} = \mathbf{y}_۲$ حل پذیر باشند، نشان دهید که $A\mathbf{x} = \mathbf{y}_۱ + \mathbf{y}_۲$ نیز حل پذیر است.

۷ ترانهاد یک ماتریس

اگر A ماتریس $m \times n$ ای به صورت $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ باشد، ماتریس جدیدی، به نام **ترانهاد** A را، که با A^T نمایش داده می‌شود، درنظر می‌گیریم. این ماتریس را به صورت $A^T = [b_{ij}]_{(nm)}$ تعریف می‌کنیم، که درآن $b_{ij} = a_{ji}$.

برای مثال،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۶ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۰ \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۷ \\ ۸ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس مختلط باشد، می‌توان ماتریسی مشابه ترانهاد برای A تعریف کرد. این ماتریس را ماتریس **الحاقی** A می‌نامیم و آن را با A^* نشان می‌دهیم. در این حالت $A^* = [b_{ij}]_{(nm)}$ که درآن $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (نماد $\bar{a}$ نشانگر مزدوج مختلط عدد a است).

لذا،

$$\begin{bmatrix} i & ۰ \\ -i & ۱ \\ ۰ & ۱+i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} -i & i & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱-i \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس حقیقی باشد، $A^* = A^T$.

عمل ترانهادن درقوانین معینی صادق است که در زیر می‌آوریم.

$$(۱)\ (A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(۲)\ (\alpha A)^T = \alpha A^T$$
$$(۳)\ (AB)^T = B^T A^T$$
$$(۴)\ (A^T)^T = A$$

اثبات (۱) گیریم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و $B = [b_{ij}]_{(mn)}$. پس $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{(mn)}$ و $(A + B)^T = [c_{ij}]_{(nm)}$، که در آن $c_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$. حال،

$$A^T + B^T = [\alpha_{ij}]_{(nm)} + [\beta_{ij}]_{(nm)} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{(nm)}$$

که در آن $\alpha_{ij} = a_{ji}$ و $\beta_{ij} = b_{ji}$. چون $c_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$، داریم

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

اثبات (۳) گیریم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و $B = [b_{ij}]_{(np)}$. بنابراین

$$(AB) = \left[\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]_{(mp)}$$

پس، $(AB)^T = [c_{ik}]_{(pm)}$، که در آن $c_{ik} = \sum_{j=۱}^{n} a_{kj} b_{ji}$. پس، $B^T A^T = [\sum_{j=۱}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}]$ که در آن $\beta_{ij} = b_{ji}$ و $\alpha_{jk} = a_{kj}$. لذا $B^T A^T = [c'_{ik}]_{(pm)}$، که در آن $c'_{ik} = \sum_{j=۱}^{n} b_{ji} a_{kj} = \sum_{j=۱}^{n} a_{kj} b_{ji}$. چون $c'_{ik} = c_{ik}$، داریم $(AB)^T = B^T A^T$. ●

اثبات قسمتهای (۲) و (۴) را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

گوییم ماتریس A **متقارن** است اگر $A = A^T$ و آن را **هرمیتی** گوییم اگر $A = A^*$.

برای مثال $\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۸ \\ ۷ & ۰ & ۴ \\ ۸ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ متقارن و $\begin{bmatrix} -۱ & i & ۴ \\ -i & ۰ & -i \\ ۴ & i & ۲ \end{bmatrix}$ هرمیتی است.

مثال دیگری از ماتریس متقارن، ماتریس فواصل شهرها، ارائه شده در آغاز بخش ۳.۲، است.

به عنوان مثالی ازکاربرد قوانین ترانهش، نشان می‌دهیم‌که AA^T متقارن است. داریم

$$\begin{aligned} (AA^T)^T &= (A^T)^T A^T && [\text{بنا به } (۳)] \\ &= AA^T && [\text{بنا به } (۴)] \end{aligned}$$

چون $(AA^T)^T = AA^T$، ماتریس AA^T متقارن است.

تمرینات

۱. برای هریک از ماتریسهای A، ماتریس A^T را بیابید.

(الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$

(ج) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ (د) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۷ & ۰ & ۶ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

۲. ثابت کنید که $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ و $(A^T)^T = A$.

۳. ثابت کنید

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* \qquad (A+B)^* = A^* + B^*$$
$$(A^*)^* = A \qquad (AB)^* = B^* A^*$$

[راهنمایی: توجه کنید که $A^* = \overline{(A^T)}$، و اگر $B = [b_{ij}]$، آنگاه $\bar{B} = [\bar{b}_{ij}]$.]

۴. (الف) نشان دهید که $A^T A$ متقارن است.
(ب) نشان دهید که $A + A^T$ متقارن است.

۵. ثابت کنید که همهٔ ماتریسهای متقارن ماتریسهای مربعی‌اند.

۶. نشان دهید که A^*A، AA^*، و $A + A^*$ هرمیتی هستند.

۷. ثابت کنید که همهٔ ماتریسهای قطری متقارن‌اند.

۸. نشان دهید که همهٔ درایه‌های قطری یک ماتریس هرمیتی حقیقی‌اند.

۹. اگر A و B دو ماتریس متقارن باشند، نشان دهید که AB متقارن است اگر وفقط اگر A با B جابجا شود.

۱۰. اگر A وارون‌پذیر باشد، نشان دهیدکه A^T وارون پذیر است و $(A^T)^{-۱} = (A^{-۱})^T$.

۱۱. یک ماتریس را **متقارن‌کج** می‌نامند اگر $A^T = -A$. نشان دهید که هر ماتریس را می‌توان به‌طور یکتا به صورت حاصلجمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس متقارن‌کج نوشت.

۱۲. اگر A با B جابجا شود، نشان دهید که A^T با B^T جابجا می‌شود.

۱۳. یک ماتریس ۲×۲ بیابید به‌طوری که $AA^T \neq A^T A$.

۱۴. اگر A یک ماتریس $n \times n$، و $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد، نشان دهید که $f(A^T) = (f(A))^T$.

۱۵. نشان دهید که هر ماتریس مربعی A را می‌توان به شکل عبارت $A = H + iK$ نوشت، که در آن H و K ماتریسهای هرمیتی هستند.

(الف) نشان دهید که این عبارت یکتاست.

(ب) نشان دهید که H با K جابجا می‌شود اگر وفقط اگر A با A^* جابجا شود.

۱۶. اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $n\times n$ باشد، $tr(A)$ را به‌صورت

$$tr(A)=a_{۱۱}+a_{۲۲}+\cdots+a_{nn}$$

تعریف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر $tr(A)$ عبارت است از مجموع درایه‌های قطری A؛ $tr(A)$ را اثر ماتریس A می‌نامند.

(الف) نشان دهید که $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

(ب) اگر a یک اسکالر باشد، نشان دهید که $tr(aA)=a\cdot tr(A)$.

(ج) نشان دهید که $tr(AB)=tr(BA)$.

۱۷. نشان دهید که $tr(AA^T)$ حاصلجمع مربعات درایه‌های A است.

۱۸. اگر A یک ماتریس حقیقی $n\times n$ باشد و $AA^T=\circ$، نشان دهید که $A=\circ$.

۱۹. نشان دهید که ماتریس برخورد یک نگار، متقارن است. (برای تعاریف لازم، ر.ک. تمرین ۱۱ از بخش ۲.۳.)

۲۰. فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، . . .، P_n نقاطی درصفحه باشند و $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $n\times n$ که در آن a_{ij} فاصلهٔ نقطهٔ P_i از نقطهٔ P_j است. نشان دهید که A یک ماتریس متقارن است.

۳

دترمینانها

۱ دترمینان ماتریسهای ۲×۲

به هرماتریس $n \times n$، اسکالری به نـام دترمینان آن ماتریس، نسبت داده مـی‌شود. بعداً خواهیم دیـد کـه اگـر ماتریسی دارای دترمینان غیرصفر باشد، دارای وارون نیز هست. برعکس، ماتریسی بـا دترمینان صفر، منفرد است. دتـرمینـان، کاربـردهـای دیگری نیز در مواردی نظیر حل معادلات خطی و محاسبهٔ وارون ماتریس دارد. مطالعهٔ دترمینانها را بـا بررسی حالت ۲×۲ آغاز می‌کنیم.

اگر $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ یک مـاتـریـس ۲×۲ بـاشد، تـعـریـف مـی‌کنیم: $\det A = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$. مقدار $\det A$ را **دترمینان** ماتریس A می‌نامند. دترمینان A را اغلب به‌صورت $\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}$ می‌نویسند، ولـی به‌خاطر سپردن این نکته مهم است کـه دترمینان، یک اسکالراست و نه‌آرایه‌ای از اعداد. چند نمونهٔ عددی از دترمینانهای ۲×۲ عبارت‌اند از:

$$\begin{vmatrix} -۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -۶ - ۱۰ = -۱۶ \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۲ \times ۵ - ۱ \times ۳ = ۷$$

اگـر دترمینان ماتریس ۲×۲ ای مانند A، غیرصفر باشد، ماتریس A وارون پذیر است. در واقـع، دراین مورد فرمول

$$A^{-۱} = \frac{۱}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}} \begin{bmatrix} a_{۲۲} & -a_{۱۲} \\ -a_{۲۱} & a_{۱۱} \end{bmatrix}$$

را داریم.

برای مشاهدهٔ این‌مطلب، فرمول فوق را امتحان می‌کنیم.

$$A^{-۱}A = \frac{۱}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}} \begin{bmatrix} a_{۲۲} & -a_{۱۲} \\ -a_{۲۱} & a_{۱۱} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{۱}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}} \begin{bmatrix} a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} & ۰ \\ ۰ & a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱} \end{bmatrix}$$
$$= I_{۲}$$

همین‌طور $AA^{-۱} = I_{۲}$. دراین مورد، دو مثال عددی می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۷ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۶ & -۷ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین، واضح است که دترمینان نقش مهمی درمحاسبهٔ وارون یک‌ماتریس ۲×۲ ایفا می‌کند.

دراین فصل، اغلب ماتریس A را با $[A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_{n}]$ نشان می‌دهیم، که در آن A_i ستون i ام A می‌باشد. لذا،

اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۷ & ۰ \\ ۸ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}$، آنگاه $A_{۱} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ ۸ \end{bmatrix}$، $A_{۲} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}$، $A_{۳} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$؛

دراین حالت، می‌نویسیم $A = [A_{۱}, A_{۲}, A_{۳}]$.

کاراترین روش برای محاسبهٔ دترمینان ماتریسهای $n \times n$، اگر n بزرگتر از ۳ باشد، محتملاً استفاده ازاعمال ستونی است. دربقیهٔ این بخش، اعمال ستونی را برای ماتریسهای ۲×۲ مطالعه می‌کنیم. دربخشهای بعد خواهیم دید که برای دترمینانهای با مراتب بالاتر، می‌توان عملیاتی را به‌کار برد که دراساس بااینها یکسان است. برای سادگی، خواص مربوط به این اعمال را (D۱)—(D۷) می‌نامیم.

(D۱)
$$\det[A_{۱} + A'_{۱}, A_{۲}] = \det[A_{۱}, A_{۲}] + \det[A'_{۱}, A_{۲}]$$
$$\det[A_{۱}, A_{۲} + A'_{۲}] = \det[A_{۱}, A_{۲}] + \det[A_{۱}, A'_{۲}]$$

مثلاً،
$$\begin{vmatrix} ۱+۴ & ۷ \\ -۲+۳ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۷ \\ -۲ & ۶ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۴ & ۷ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}$$

برای اثبات (D۱)، گیریم

$A_{۱} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \end{bmatrix}$، $A'_{۱} = \begin{bmatrix} a'_{۱۱} \\ a'_{۲۱} \end{bmatrix}$، $A_{۲} = \begin{bmatrix} a_{۱۲} \\ a_{۲۲} \end{bmatrix}$.

در این صورت

$$\det[A_{۱} + A'_{۱}, A_{۲}] = \begin{vmatrix} a_{۱۱} + a'_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} + a'_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}$$
$$= (a_{۱۱} + a'_{۱۱})a_{۲۲} - (a_{۲۱} + a'_{۲۱})a_{۱۲}$$
$$= (a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}) + (a'_{۱۱}a_{۲۲} - a'_{۲۱}a_{۱۲})$$
$$= \det[A_{۱}, A_{۲}] + \det[A'_{۱}, A_{۲}]$$

اثبات (D۱) درمورد ستون دیگر به‌روشی کاملاً مشابه انجام می‌گیرد. خاصیت‌دیگری که نسبتاً شبیه به خاصیت اولی است، عبارت است از:

$$\text{(D۲)}\qquad \det[cA_۱, A_۲] = c\det[A_۱, A_۲]$$
$$\det[A_۱, cA_۲] = c\det[A_۱, A_۲]$$

مثلاً، $\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۵c & ۳ \\ ۳c & -۱ \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۵ & ۳c \\ ۳ & -c \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$. بـــرای اثبـات (D۲)، همان نمادهای قبلی را به کار می بریم. دراین صورت

$$\det[cA_۱, A_۲] = \begin{vmatrix} ca_{۱۱} & a_{۱۲} \\ ca_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = ca_{۱۱}a_{۲۲} - ca_{۱۲}a_{۲۱} = c\det[A_۱, A_۲]$$

دو خاصیت دیگر عبارت‌اند از:

$$\text{(D۳)}\qquad \det[A, A] = ۰$$
$$\text{(D۴)}\qquad \det I_۲ = ۱$$

برای اثبات (D۳)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\det[A, A] = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = ۰$$

خاصیت(D۳) می‌گوید که دترمینانی بادوستون مساوی، برابر صفراست. بنابه(D۴)، دترمینان ماتریس همانی برابر ۱ است.

با استفاده از (D۱)، (D۲)، (D۳)، و (D۴)، مـی‌توانیم خـواص دیگـری بـرای دترمینان به دست آوریم.

$$\text{(D۵)}\qquad \det[A_۱, A_۲ + cA_۱] = \det[A_۱, A_۲]$$
$$\det[A_۱ + cA_۲, A_۲] = \det[A_۱, A_۲]$$
$$\text{(D۶)}\qquad \det[A_۱, A_۲] = -\det[A_۲, A_۱]$$
$$\text{(D۷)}\qquad \det[A, ۰] = \det[۰, A] = ۰$$

خاصیت (D۵) می‌گوید کـه اگـر مضرب اسکالری از یـک ستون را به‌ستون دیگر بیفزاییم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. خاصیت (D۶) می‌گوید که تعویض دو ستون علامت دترمینان را تغییر می‌دهد. (D۷) بدیـن معنی است که اگر یکی از ستونهای دترمینان صفر باشد، دترمینان صفر است.

به عنوان مثالهایی از (D۵) و (D۶)، داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۶+c \\ ۳ & ۸+۳c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۶ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

برای اثبات (D۵)، مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\det[A_1, A_2 + cA_1] &= \det[A_1, A_2] + \det[A_1, cA_1] && [\text{بنا به (D۱)}]\\ &= \det[A_1, A_2] + c\det[A_1, A_1] && [\text{بنا به (D۲)}]\\ &= \det[A_1, A_2] + c\cdot 0 && [\text{بنا به (D۳)}]\\ &= \det[A_1, A_2]\end{aligned}$$

برای اثبات (D۶)، مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\det[A_1, A_2] &= \det[A_1 + A_2, A_2] && [\text{بنا به (D۵)}]\\ &= \det[A_1 + A_2, -A_1] && [\text{بنا به (D۵)}]\\ &= \det[A_2, -A_1] && [\text{بنا به (D۵)}]\\ &= -\det[A_2, A_1] && [\text{بنا به (D۲)}]\end{aligned}$$

با استفاده از خواص (D۱) — (D۷)، دترمینان را بدون مراجعه به‌تعریف اصلی می‌توان حساب کرد. برای مثال،

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -7+7\times 1 \\ 2 & 3+7\times 2 \end{vmatrix} && [\text{بنا به (D۵)}]\\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 17 \end{vmatrix}\\ &= 17\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} && [\text{بنا به (D۲)}]\\ &= 17\begin{vmatrix} 1+(-2)\times 0 & 0 \\ 2+(-2)\times 1 & 1 \end{vmatrix} && [\text{بنا به (D۵)}]\\ &= 17\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 17 && [\text{بنا به (D۴)}]\end{aligned}$$

در مورد ماتریسهای ۲ × ۲، محاسبهٔ مستقیم دترمینان از روی تعریف آن، محتملاً آسانتر است. لکن برای دترمینانهای بزرگ، استفادهٔ مکرر از خواصی مشابه با (D۱) — (D۷)، روش کاراتری است.

تمرینات

۱. دترمینانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ (ه) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (و) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

۲. هریک از تساویهای زیر به ازای چه مقداری از λ برقرار است؟

(الف) $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ ۳ & \lambda-۲ \end{vmatrix} = ۰$ (ب) $\begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۱ \\ ۱ & ۱+\lambda \end{vmatrix} = ۰$

(ج) $\begin{vmatrix} ۱+\lambda & ۱ \\ ۲+۲\lambda & ۲ \end{vmatrix} = ۰$

۳. اگر $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ۰$، نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = ۰$$

نشان دهید که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون ندارد.

۴. مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}^{-۱}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}$ (ج) $\begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}$

(د) $\begin{bmatrix} ۱-a & a \\ -a & ۱+a \end{bmatrix}^{-۱}$ (ه) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-۱}$

۵. تابع $D(A)$ که روی ماتریسهای ۲ × ۲ تعریف شده و درخواص (D۱) — (D۴) صدق می‌کند، مفروض است. نشان دهید که $D(A) = \det A$. به عبارت دیگر، نشان دهید که خواص (D۱) — (D۴) دترمینان را به طور کامل مشخص می‌کنند.

۶. نشان دهید که خواص (D۱) — (D۷) همان طور که برای ستونها برقرارند، در مورد سطرها نیز برقرارند.

۲ تعریف و خواص اصلی دترمینانها

در این بخش، تعریفی استقرایی از دترمینان یک ماتریس $n \times n$ ارائه می‌دهیم. به عبارت دیگر، با دانستن اینکه دترمینان ماتریس ۲ × ۲ چگونه تعریف می‌شود، دترمینان ماتریس ۳ × ۳ را تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن، تعریف مربوطه را در مورد ماتریس ۴ × ۴ ارائه می‌دهیم. درحالت کلی، با استفاده از تعریف دترمینان $(n-۱) \times (n-۱)$، دترمینان ماتریس $n \times n$ را تعریف می‌کنیم.

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، ماتریس حاصل از حذف سطر i ام و ستون j ام A را با $\hat{A}_{ij}$ نشان می‌دهیم. لذا، اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۷ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

آنگاه $\hat{A}_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$، $\hat{A}_{۳۱} = \begin{bmatrix} ۰ & -۷ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، $\hat{A}_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۰ & -۷ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$.

با فرض اینکه دترمینان ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ تعریف شده باشد، دترمینان یک ماتریس $n \times n$ به صورت $A=[a_{ij}]$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1}a_{11}\det\hat{A}_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det\hat{A}_{12}\\ &\quad + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det\hat{A}_{1n}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det\hat{A}_{1j}\end{aligned}$$

در مورد ماتریسهای ۳ × ۳، این تعریف به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} &= a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}\\ &+ a_{13}\det\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}\\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

اغلب می‌نویسیم

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}_n$$

برای مثال،

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$= 3(8-2) - 2(2-0) + (1-0) = 18 - 4 + 1 = 15$$

در مورد ماتریسهای ۴ × ۴، تعریف فوق به صورتی مشروحتر، چنین می‌شود.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}\\ &+ a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

با این فرمول می‌توان هردترمینان ۴ × ۴ را ازطریق محاسبهٔ چهار دترمینان ۳ × ۳، حساب کرد ودر بالا چگونگی محاسبهٔ دترمینان ۳ × ۳ را دیده‌ایم. همین طور می‌توانیم فرمولی برای دترمینانهای ۵ × ۵ بنویسیم. در این صورت محاسبهٔ یک دترمینان ۵ × ۵

ازطریق محاسبهٔ پنج دترمینان ۴ × ۴ صورت می‌گیرد. این روند می‌تواند به طورنامتناهی ادامه پیدا کند، ولی از لحاظ محاسباتی کارایـی ندارد. به جای ایـن‌کار، خواص مشابه با (D۱)—(D۷) از بخش ۱۰۳ را شرح و بسط می‌دهیم. استفاده از ایـن خواص و روشی شبیه به روش حذفی گاوسی، که زحمت‌آن از نوشتن فرمولهای دترمینان بسیار کمتر است، به ما امکان می‌دهد که هر دترمینانی را حساب کنیم.

در بیان و اثبات خواص مشابه با (D۱)—(D۷) از بخش ۱۰۳ برای دترمینانهای با مرتبهٔ بالا، بجز درمورد مثالها، بحث را به حالت ۳ × ۳ محدود می‌کنیم. لکن، ازآغاز باید متوجه بود که مطالبی که بیان می‌کنیم وروشهایی که ارائه می‌دهیم کاملاً جنبهٔ کلی دارند. علت اینکه فقط به حالت ۳ × ۳ می‌پردازیم، آن است که از نمادها و عملیات خسته کننده احتراز شود. خاصیت (D۱) را در این حالت بیان و ثابت خواهیم کرد. پس از انجام این مرحله، تغییر و تبدیل مقتضی برای دترمینانهای ۴ × ۴ تقریباً واضح خواهد بود. با کمی تفکر بیشتر، می‌توان استدلالی استقرائی ارائه نمود که تمام حالات را دربر داشته باشد. با درنظر گرفتن این مطلب، خاصیت (D۱) عبارت است از:

$$(D۱)\qquad \begin{aligned} \det[A_۱ + A'_۱, A_۲, A_۳] &= \det[A_۱, A_۲, A_۳] + \det[A'_۱, A_۲, A_۳] \\ \det[A_۱, A_۲ + A'_۲, A_۳] &= \det[A_۱, A_۲, A_۳] + \det[A_۱, A'_۲, A_۳] \\ \det[A_۱, A_۲, A_۳ + A'_۳] &= \det[A_۱, A_۲, A_۳] + \det[A_۱, A_۲, A'_۳] \end{aligned}$$

مثلاً،

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۷+۸ & ۲ \\ ۶ & ۲+۷ & -۱ \\ -۵ & ۵+۳ & ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۷ & ۲ \\ ۶ & ۲ & -۱ \\ -۵ & ۵ & ۴ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۷ & -۱ \\ -۵ & ۳ & ۴ \end{vmatrix}$$

اکنون (D۱) را در حالت ۳ × ۳ ثابت می‌کنیم. توجه کنید که در واقع اثبات این موضوع فقط به تعریف دترمینان و (D۱) در حالت ۲ × ۲، بستگی دارد.

در حالت ۳ × ۳، در مورد ستون دوم، (D۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}+a'_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}+a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}+a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a'_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

برای اثبات این مطلب، مشاهده می‌کنیم که بنا به تعریف دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}+a'_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}+a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}+a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = a_{۱۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲}+a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲}+a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - (a_{۱۲}+a'_{۱۲})\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲}+a'_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}+a'_{۳۲} \end{vmatrix}$$

با استفاده از خاصیت (D۱) در حالت ۲ × ۲،

$$\begin{vmatrix} a_{۲۲}+a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲}+a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲}+a'_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲}+a'_{۳۲} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a'_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a'_{۳۲} \end{vmatrix}$$

لذا،

$$\Delta = a_{۱۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{۱۱}\begin{vmatrix} a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a'_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a'_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a'_{۳۲} \end{vmatrix}$$

بنا براین

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a'_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a'_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a'_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

اثبات (D۱) در مورد سایر ستونها بــه همین ترتیب انجام مـی‌شود. خاصیت بعدی عبارت است از:

(D۲)
$$\det[cA_۱, A_۲, A_۳] = c\det[A_۱, A_۲, A_۳]$$
$$\det[A_۱, cA_۲, A_۳] = c\det[A_۱, A_۲, A_۳]$$
$$\det[A_۱, A_۲, cA_۳] = c\det[A_۱, A_۲, A_۳]$$

برای مثال، $\begin{vmatrix} -۱ & ۴c & ۸ \\ ۲ & ۳c & ۷ \\ -۷ & ۸c & ۱ \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} -۱ & ۴ & ۸ \\ ۲ & ۳ & ۷ \\ -۷ & ۸ & ۱ \end{vmatrix}$.

اثبات، در مورد ستون دوم، به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & ca_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & ca_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & ca_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = a_{۱۱}\begin{vmatrix} ca_{۲۲} & a_{۲۳} \\ ca_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - ca_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & ca_{۲۲} \\ a_{۳۱} & ca_{۳۲} \end{vmatrix}$$

با استفاده از (D۲) در حالت ۲×۲،

$$\Delta = ca_{۱۱}\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - ca_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + ca_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

خاصیت سوم عبارت است از:

(D۳) $\det I_n = ۱$، که درآن I_n، طبق معمول، مـاتـریس همانی از مرتبهٔ n می‌باشد.

در حالت ۳ × ۳ داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} - ۰\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} + ۰\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۱$$

اثبات این مطلب برای مقادیر بزرگتر n هم به همین سادگی است.
خاصیت بعدی بآسانی با جملهٔ زیر بیان می‌شود:

(D۴) دترمینان ماتریسی که دارای دو ستون مساوی است، صفر است.

در حالت ۳ × ۳، این را می‌توان به صورت

$$\det[A, A, B] = \det[A, B, A] = \det[B, A, A] = ۰$$

نوشت.

برای مثال $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۱۷ \\ ۴ & ۴ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$.

برای اثبات (D۴)، دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ & b_۳ \end{vmatrix} = a_۱\begin{vmatrix} b_۲ & b_۲ \\ b_۳ & b_۳ \end{vmatrix} - b_۱\begin{vmatrix} a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{vmatrix} + b_۱\begin{vmatrix} a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{vmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم.

بنا به (D۴) در حالت ۲ × ۲ اولین جمله صفر است، و دو جملهٔ آخری قرینه یکدیگرند و حذف می‌شوند.

به همین ترتیب

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_۱ & a_۱ & b_۱ \\ b_۲ & a_۲ & b_۲ \\ b_۳ & a_۳ & b_۳ \end{vmatrix} = b_۱\begin{vmatrix} a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{vmatrix} - a_۱\begin{vmatrix} b_۲ & b_۲ \\ b_۳ & b_۳ \end{vmatrix} + b_۱\begin{vmatrix} b_۲ & a_۲ \\ b_۳ & a_۳ \end{vmatrix}$$

بنا به (D۶) در حالت ۲ × ۲،

$$\begin{vmatrix} a_۲ & b_۲ \\ a_۳ & b_۳ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_۲ & a_۲ \\ b_۳ & a_۳ \end{vmatrix}$$

لذا، جملات اول وآخرقرینهٔ یکدیگرند وحذف می‌شوند وبنا به (D۴) در حالت ۲ × ۲، جملهٔ دوم صفر است.

هر تابع اسکالر، تعریف شده روی تمام ماتریسهای $n \times n$، که در (D۱) — (D۴) صدق کند، مساوی با دترمینان است؛ ما این مطلب را بدون اثبات می‌گذاریم. ازاینجا نتیجه می‌شود که با استفاده از (D۱) — (D۴)، می‌توان مقدار هر دترمینانی را حساب کرد. به‌طور کلی، این روش بسیارکاراتر از مراجعه به تعریف اصلی است.

درعمل، خاصیتی که برای محاسبهٔ دترمینان بیشترین استفاده را دارد، محتملاً خاصیت زیر است:

(D۵) اگرمضرب اسکالری ازیک ستون‌را به ستون دیگر بیفزاییم، مقداردترمینان تغییر نمی‌کند.

مثلاً،
$$\begin{vmatrix} ۰ & ۴ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۷ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۴+۱c & ۱ \\ ۱ & -۳+۷c & ۷ \\ ۲ & ۱+۳c & ۳ \end{vmatrix}.$$

(D۵) را با استفاده از (D۱)—(D۴) می‌توان ثابت کرد. مثلاً، فرض می‌کنیم که در یک دترمینان ۳×۳، c برابرستون سوم به‌ستون اول افزوده شده است. باید نشان دهیم که مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند، یا

$$\det [A_۱ + cA_۳, A_۲, A_۳] = \det [A_۱, A_۲, A_۳].$$

بنا به (D۱)،

$$\det [A_۱ + cA_۳, A_۲, A_۳] = \det [A_۱, A_۲, A_۳] + \det[cA_۳, A_۲, A_۳].$$

بنا به (D۲)، $\det [cA_۳, A_۲, A_۳] = c\det [A_۳, A_۲, A_۳]$. با توجه به (D۴)، $\det [A_۳, A_۲, A_۳] = ۰$. لذا، $\det [A_۱ + cA_۳, A_۲, A_۳] = \det [A_۱, A_۲, A_۳]$.

اثبات سایر حالات، اساساً همین طور است.

خاصیت بعدی نیز بآسانی قابل بیان است:

(D۶) تعویض دو ستون یک دترمینان با هم، علامت دترمینان را تغییر می‌دهد.

برای مثال،
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ & ۵ \end{vmatrix}.$$

اثبات (D۶) در واقع همان است که در بخش ۱.۳ ارائه شد و در اینجا آن را تکرار نمی‌کنیم. بالاخره، داریم

(D۷) اگر تمام درایه‌های یک ستون صفر باشند، دترمینان صفر است.

در واقع بنا به (D۲)،

$$\det [A_۱, ۰, A_۳] = \det [A_۱, ۰ \times ۰, A_۳] = ۰\cdot \det [A_۱, ۰, A_۳]$$

و جملهٔ آخر صفر است.

با استفادهٔ مکرر از این خواص می‌توانیم هر دترمینانی را حساب کنیم. همان طورکه در مثالهای زیر خواهیم دید، احتمالاً مفیدترین این خواص، (D۵) است.

مثال ۱ دترمینان زیر را حساب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۷ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴+(-۴)۱ & ۱ & ۳ \\ ۲+(-۴)۰ & ۰ & ۷ \\ -۱+(-۴)۳ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۷ \\ -۱۳ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

بنا به (D۵)،

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3+(-3)1 \\ 2 & 0 & 7+(-3)0 \\ -13 & 3 & 2+(-3)3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ -13 & 3 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -13 & -7 \end{vmatrix}
$$

$$
= 14 - 91 = -77
$$

ایدهٔ نهفته در این مثال کاملاً ساده و همان ایـدهٔ حذفی گاوسی است. ستونی را که درایهٔ اولین سطرآن غیر صفر بـاشد، انتخاب می‌کنیم. (درایـن مثال، ستون دوم را انتخاب کردیم.) با افزودن مضارب مناسبی از این ستون بـه تمامی ستونهای دیگر، تمام درایه‌های دیگر سطر اول را به صفر تبدیل می‌کنیم. بنا به (D۵)، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. سپس از تعریف دترمینان استفاده می‌کنیم. بنابراین در مثال فوق، مسئله بـه محاسبهٔ یک دترمینان ۲ × ۲ تحویل یافت، که به‌اندازهٔ کافی آسان می‌باشد. به‌هرحال، در حالت کلی دترمینانی با اندازهٔ کوچکتر به دست می‌آوریم که تمام عملیات روی‌آن تکرار می‌شود.

در مثال بعدی این روش را برای محاسبهٔ یک دترمینان ۴ × ۴ به‌کار می‌بریم.

مثال ۲ دترمینان زیر را حساب کنید.

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

[بنا به (D۵)]

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 2+(-2)(1) & -3+(3)(1) & 1+(-1)(1) \\ -3 & 0+(-2)(-3) & 3+(3)(-3) & 0+(-1)(-3) \\ 4 & 1+(-2)(4) & 0+(3)(4) & 0+(-1)(4) \\ 1 & 2+(-2)(1) & 2+(3)(1) & 1+(-1)(1) \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -6 & 3 \\ 4 & -7 & 12 & -4 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -7 & 12 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 6+(-2)(3) & -6+(2)(3) & 3 \\ -7+(-2)(-4) & 12+(2)(-4) & -4 \\ 0+(-2)(0) & 5+(2)(0) & 0 \end{vmatrix}
$$

[بنا به (D۵)]

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15
$$

مثال ۳ نشان می‌دهیم که

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{4n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\text{،}$$

به عبارت دیگر، اگر تمام درایه‌های زیرقطر یک ماتریس صفر باشند (چنین ماتریسی را، ماتریس **بالا مثلثی** می‌نامند)، دترمینان آن برابر حاصلضرب درایه‌های قطری آن است.

اگر $a_{11} = 0$، ستون اول صفر است. بنا به (D7)، دترمینان مساوی صفر می‌باشد؛ و نیز چون $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 0$، تساوی برقرار است و اثبات تمام می‌شود. بنابراین، فرض می‌کنیم که $a_{11} \neq 0$. دراین صورت با ضرب ستون اول در اسکالرهای مناسب و کم‌کردن این حاصلضربها از بقیهٔ ستونها، درمی‌یابیم که دترمینان برابر است با

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{4n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

بر طبق تعریف، این دترمینان برابر است با

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{4n} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال بـه وسیلهٔ استقرا، یا تکرار استدلال فوق، دیده می‌شود کـه دترمینان اخیر برابر $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ است. لذا، دترمینان اصلی $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ است.

در مسائل متعددی بدون محاسبهٔ مقدار دترمینان مـی‌توان ثابت کرد که دو دترمینان مساوی‌اند. برای نمونه،

مثال ۴ ثابت می‌کنیم که

$$D = \begin{vmatrix} na_1 + b_1 & nb_1 + c_1 & nc_1 + a_1 \\ na_2 + b_2 & nb_2 + c_2 & nc_2 + a_2 \\ na_3 + b_3 & nb_3 + c_3 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (1 + n^3)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

می نویسیم

$$\begin{aligned} D &= \det[nA + B, nB + C, nC + A] \\ &= \det[nA + B, nB + C - n(nA + B), nC + A] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det[nA + B, C - n^2A, nC + A] \\
&= \det[nA + B, C - n^2A, nC + A - n(C - n^2A)] \\
&= \det[nA + B, C - n^2A, (1 + n^3)A] \\
&= (1 + n^3)\det[nA + B, C - n^2A, A] \\
&= (1 + n^3)\det[nA + B - nA, C - n^2A + n^2A, A] \\
&= (1 + n^3)\det[B, C, A] = -(1 + n^3)\det[B, A, C] \\
&= (1 + n^3)\det[A, B, C]
\end{aligned}
$$

تمرینات

۱. دترمینانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ (ه) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(و) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ (ز) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

۲. نشان دهید که

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & -b_1 & a_1 \\ c_2 & -b_2 & a_2 \\ c_3 & -b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}
$$

۳. نشان دهید که

$$
\begin{vmatrix} a + b & 1 & b + 1 \\ b + c & 1 & c + 1 \\ c + d & 1 & d + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & d \end{vmatrix}
$$

۴. فرض کنید A یک ماتریس مربعی است کــه یک ستون آن مضرب اسکالری از ستون دیگرش می‌باشد. نشان دهید که $\det A = 0$.

۵. ثابت کنید که

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + xa_1 & c_1 + yb_1 + za_1 \\ a_2 & b_2 + xa_2 & c_2 + yb_2 + za_2 \\ a_3 & b_3 + xa_3 & c_3 + yb_3 + za_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

۶. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

۷. مقدار دترمینان زیر را بیابید.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

۸. تمام مقادیر x را بیابید که به ازای آنها

(الف) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 0 & x-4 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ (ب) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$

(ج) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

۹. فرض کنید A یک ماتریس مربعی با مرتبهٔ n باشد. نشان دهیدکه $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

۱۰. نشان دهید که $\det[X_1+X_2, X_2+X_3, X_3+X_1] = 2\det[X_1, X_2, X_3]$.

۱۱. نشان دهید که $\det[X_1+X_2, X_2+X_3, X_3+X_4, X_4+X_1] = 0$.

۱۲. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n = x^{n-2}(x^2-1)$$

۱۳. فرض کنید A ماتریسی باشد که هر ستون آن دارای یک و فقط یک درایهٔ غیر صفر است که این درایه ۱ می‌باشد. نشان دهید که $\det A$ مساوی ۱+، ۱− یا ۰ است. برای هریک ازاین سه حالت مثالی بیاورید.

۱۴. نشان دهید که

$$\det[X_1, X_2, X_3] = -\det[X_2, X_1, X_3] = \det[X_2, X_3, X_1]$$
$$= -\det[X_3, X_2, X_1] = \det[X_3, X_1, X_2] = -\det[X_1, X_3, X_2]$$

۱۵. بدون محاسبه، نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

۱۶. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} 1 & -(x_1+x_2) & x_1x_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(x_1+x_2) & x_1x_2 \\ 1 & -(y_1+x_2) & y_1y_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(y_1+y_2) & y_1y_2 \end{vmatrix} = (x_1-y_1)(x_1-y_2)(x_2-y_1)(x_2-y_2)$$

۱۷. با استفاده از تمرین ۱۶، نشان دهید که چند جملهایهای

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0, \qquad a_0\neq 0$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0, \qquad b_0\neq 0$$

دارای یک ریشهٔ مشترک‌اند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

۱۸. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha_{n-1}+x \end{vmatrix} = x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0$$

۱۹. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_{22} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_{32} & a_{33} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots & 1 & 1 \\ & & & \vdots & & & & \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{22}-1)(a_{33}-1)\cdots(a_{nn}-1)$$

۲۰. تمام ریشه‌های x معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_1 & x & x_3 & x_4 \\ 1 & x_1 & x_2 & x & x_4 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x \end{vmatrix} = 0$$

۳ یک خاصیت ضربی دترمینانها

در این بخش، نشان می‌دهیم که اگر A و B ماتریسهایی $n\times n$ باشند، $\det AB=\det A\det B$.
به عبارت دیگر، دترمینان حاصلضرب A و B برابر است با حاصلضرب دترمینانهای آنها.
ابتدا، نتیجه‌ای از این مطلب را متذکر می‌شویم.

نتیجه اگر A وارون‌پذیر باشد، $\det A\neq 0$.

اثبات اگر A وارون‌پذیر باشد، $AA^{-1}=I$. لذا، $\det AA^{-1}=\det I=1$.
چون $\det AA^{-1}=\det A\det A^{-1}$، نتیجه می‌شود که $\det A\det A^{-1}=1$.
بنابراین، $\det A\neq 0$. ●

مثال ۱ ازآنجا که

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3-3(1) & 2-2(1) \\ 3 & 2-3(3) & -1-2(3) \\ -1 & 4-3(-1) & 5-2(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

ماتریس $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ وارون‌پذیر نیست.

قضیه $\det A\det B=\det AB$.

اثبات قضیه را فقط برای ماتریسهای 2×2 ثابت می‌کنیم. اثباتی که می‌آوریم به طور سرراست تعمیم داده می‌شود ولی نوشتن نمادها و انجام عملیات مربوط به‌آن تا حدی خسته‌کننده است.

گیریم $A=[A_1, A_2]$ و $B=[b_{ij}]$. در این صورت مشاهده می‌کنیم که

$$AB=[b_{11}A_1+b_{21}A_2, b_{12}A_1+b_{22}A_2].$$

برای ملاحظهٔ این مطلب، گیریم $A_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ و $A_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$. سپس حاصلضرب $AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم. می‌بینیم که ستون اول AB، بردار ستونی $b_{11}A_1+b_{21}A_2$ است. به همین ترتیب ستون $b_{12}A_1+b_{22}A_2$ ستون دوم است.

لذا،

$$\begin{aligned}\det AB &= \det [b_{۱۱}A_۱ + b_{۲۱}A_۲, b_{۱۲}A_۱ + b_{۲۲}A_۲]\\ &= \sum_{\substack{۱\leqslant i\leqslant ۲\\ ۱\leqslant j\leqslant ۲}} b_{i۱}b_{j۲} \det [A_i, A_j]\end{aligned}$$

مرحلهٔ اخیر با استفادهٔ مکرر از (D۱) و (D۲) از بخش ۱.۳، انجام یافت. جمع فوق، روی تمام زوجهای مرتب (۲ ,۲) ,(۱ ,۲) ,(۲ ,۱) ,(۱ ,۱) $=(i, j)$ صورت گرفته است.

اگر درجمله‌ای ازحاصلجمع فوق، $i = j$، آنگاه $A_i = A_j$. لذا، $\det [A_i, A_j] = ۰$، زیرا دو ستون دترمینان مساوی‌اند. بنابراین، در حاصلجمع فقط کافی است که حالات (i, j) مساوی (۱ ,۲) یا (۲ ,۱) را بررسی کنیم. اگر این مطلب را به‌طور مشروح بنویسیم، $\det AB = b_{۱۱}b_{۲۲}\det[A_۱, A_۲] + b_{۲۱}b_{۱۲}\det[A_۲, A_۱]$. چون $\det[A_۱, A_۲] = \det A$ و $\det [A_۲, A_۱] = -\det A$، نتیجه می‌شود که

$$\det AB = (b_{۱۱}b_{۲۲} - b_{۲۱}b_{۱۲})\det A = \det B \det A \qquad \bullet$$

مثال ۲ در اینجا مثالی عددی می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۱\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & -۳\end{vmatrix} = -۳$$

و

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۱\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & -۳ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۱\end{vmatrix} = -۳ - ۴ = -۷$$

همچنین

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۶ & ۱\end{bmatrix}$$

بالاخره، دترمینان حاصلضرب فوق را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۶ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۶ & ۱\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۲ & -۱۱ & -۲\\ ۲ & -۶ & -۳\end{vmatrix} = ۲۱$$

تمرینات

(در تمرینات زیر فرض کنید تمام ماتریسها مربعی باشند.)

۱. نشان دهید که $\det A^n = (\det A)^n$.

۲. اگر A وارون‌پذیر باشد، نشان دهید که $\det A^{-۱} = (\det A)^{-۱}$.

۳. اگر A یک ماتریس حقیقی $n\times n$ باشد و به‌ازای یک عدد صحیح‌فرد k، داشته باشیم $A^k = I_n$، نشان دهید که $\det A = ۱$.

۴. اگر $A^{۲} = I_n$، نشان دهید که $\det A = \pm ۱$.

۵. اگر C وارون‌پذیر باشد، نشان دهید که برای هر ماتریس X که‌هم‌مرتبه با C باشد،

$$\det CXC^{-۱} = \det X.$$

۶. نشان دهید که ماتریسهای زیر وارون‌پذیر نیستند.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۸ \\ ۰ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ۶ & ۸ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$

۷. نشان دهید هیچ ماتریس حقیقی B وجود ندارد که در تساویهای زیر صدق کند.

(الف) $B^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۸. اگر A یک ماتریس پوچ توان باشد (یعنی، به ازای یک عدد صحیح مثبت n، $A^n = ۰$)، نشان دهید که $\det A = ۰$.

۹. با ضرب $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ در $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$ و محاسبهٔ دترمینان، نشان دهید که

$$(a^{۲} + b^{۲})(c^{۲} + d^{۲}) = (ac - bd)^{۲} + (ad + bc)^{۲}$$

۱۰. استدلالی را که برای اثبات $\det A \det B = \det AB$ در متن درس ارائه دادیم به طور مشروح برای حالت ۳×۳ بیاورید.

۱۱. فرض کنید $Q = \begin{bmatrix} b & c & ۰ \\ a & ۰ & c \\ ۰ & a & b \end{bmatrix}$. با محاسبهٔ $\det Q$، $\det Q^T$، و $\det (QQ^T)$، نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} b^{۲} + c^{۲} & ab & ac \\ ab & a^{۲} + c^{۲} & bc \\ ac & bc & a^{۲} + b^{۲} \end{vmatrix} = ۴a^{۲}b^{۲}c^{۲}$$

۱۲. دو ماتریس A و B را نسبت به هم پاد جابجایی گویند اگر $AB = -BA$. هرگاه A و B ماتریسهایی ۳×۳ و نسبت به هم پاد جابجایی باشند، نشان دهید که لااقل یکی از این دو ماتریس وارون‌ناپذیر است.

۱۳. نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & ۰ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & ۰ \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۴. فرض کنید ماتریس ۳×۳ای مانند C را بتوان به صورت حاصلضرب یک

ماتریس ۲ × ۳ در یک ماتریس ۳ × ۲ نوشت. نشان دهید که $\det C = 0$.

۱۵. با محاسبهٔ حاصلضرب

$$\begin{bmatrix} \sin x_1 & \cos x_1 \\ \sin x_2 & \cos x_2 \\ \sin x_3 & \cos x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & \cos x_3 \\ \sin x_1 & \sin x_2 & \sin x_3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} \sin 2x_1 & \sin(x_1+x_2) & \sin(x_1+x_3) \\ \sin(x_1+x_2) & \sin 2x_2 & \sin(x_2+x_3) \\ \sin(x_1+x_3) & \sin(x_2+x_3) & \sin 2x_3 \end{vmatrix} = 0$$

۴ اعمال سطری و بسطهای همسازه‌ای

در بخش ۲.۳، دیدیم که اعمال بخصوصی روی ستونهای یک دترمینان انجام می‌شود که مقدار دترمینان را به روشی خاص تغییر می‌دهد. در این بخش، می‌بینیم که مشابه این اعمال را می‌توان روی سطرها انجام داد که تأثیری شبیه به تأثیراعمال ستونی روی مقداردترمینان دارد. هفت‌خاصیت مربوط به‌اعمال ستونی را (D۱) — (D۷) نامیدیم. خواص مشابه‌آنها برای سطرها را (D'۱) — (D'۷) می‌نامیم. از جایگزینی «ستون» با «سطر» در تعریف خواص‌ستونی، می‌توان فرمولبندی صحیح خواص سطری را به‌دست‌آورد؛ یااینکه می‌توانیم تساوی مربوط به‌خواص ستونی را بنویسیم و همهٔ دترمینانهای مربوطه را ترانهاد کنیم، لذا نمی‌تواند ابهامی وجود داشته باشد. چند مثال می‌آوریم.

در حالت ۳ × ۳، فرمولبندی خاصی از (D'۱) عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

البته با انجام همین عمل روی سطرهای اول و سوم، دو فرمولبندی دیگر برای (D'۱) در حالت ۳ × ۳ به دست می‌آید.

نمونه‌ای از (D'۲) به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ db_1 & db_2 & db_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

البته دراین حالت (D'۳) مطلب جدیدی دربر ندارد. همان‌طور که در مورد ستونها گفتیم، (D'۴) را می‌توان بآسانی بیان کرد: مقدار دترمینانی با دو سطر مساوی، صفر است.

در حالت ۲ × ۲، صحت خواص سطری را، به‌همان روشی که در بخش ۱.۳ برای اعمال‌ستونی دیدیم، می‌توان نشان‌داد. روش دیگراین است‌که ملاحظه‌کنیم $\det A = \det A^T$، و در تساویهای مربوطه، A^T را با A جایگزین نماییم. بعداً در این بخش، ثابت خواهیم

کرد که به ازای هر ماتریس $n \times n$ای مانند A داریم $\det A = \det A^T$. لکن برای حالت ۲ $\times$ ۲، اثبات خیلی ساده است. داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

اثبات صحت خواص مربوط به سطرها خیلی شبیه به اثبات صحت خواص مربوط به ستونهاست. از این‌رو، ما دو مثال ارائه خواهیم کرد و بقیه را به عهدهٔ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌گذاریم.

ابتدا، $(D'1)$ را که در بالا بیان شد، ثابت می‌کنیم. گیریم D دترمینان طرف چپ باشد. آنگاه، بنا به تعریف دترمینان،

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

حال با استفاده از $(D'1)$ در حالت ۲ $\times$ ۲، نتیجه می‌شود که

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که در این عبارت، حاصلجمع جملات اول، سوم، و پنجم همان دترمینان $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$ است. همین طور، حاصلجمع جملات دوم، چهارم، و ششم همان دترمینان $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$ است. لذا D، حاصلجمع این دو دترمینان می‌باشد، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اکنون نمونهٔ خاصی از $(D'4)$ را در حالت ۳ $\times$ ۳ ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم D دترمینانی باشد که سطرهای اول و سوم آن مساوی‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم $D = 0$. گیریم $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$. حال اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$، بنا به تعریف دترمینان، $D = 0$. لذا می‌توان فرض کرد که لااقل یک a_i صفر نیست. ابتدا، فرض می‌کنیم $a_1 \neq 0$. آنگاه بنا به $(D2)$، $D = a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ b_1/a_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$. حال، a_2 برابر ستون اول را ازستون دوم و a_3 برابر ستون اول را ازستون سوم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$D = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1/a_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$، که درآن c_2 و c_3 جملاتی هستند کـه زحمت محاسبهٔ آنها را به خود نمی‌دهیم. با استفاده از تعریف دترمینان، $0 = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} D = a_1$. اگر $a_2 \neq 0$، آنگاه تعویض ستونهای اول و دوم علامت دترمینان را تغییر می‌دهــد و دترمینانی از همان نوع به‌وجود می‌آورد که درایهٔ $(1, 1)$ آن صفر نیست. بنا به‌آنچه نشان داده‌ایم، دترمینان دوم، و ازآنجا دترمینان اول صفر است. اگر $a_3 \neq 0$، همین استدلال به نتیجه می‌رسد.

احتمالاً برایتان مشکل نخواهد بود کـه ایـن استدلال را بـرای حالت 4×4 و حالتهای دیگر به‌طور مناسب تغییر دهید. همچنین، توجه کنید کـه اگر سطرهای دوم و سوم مساوی باشند، خیلی‌آسان‌تر می‌توان نشان داد که مقدار دترمینان صفر است.

حال‌خواص $(D'5)$، $(D'6)$، و $(D'7)$ را می‌توانیم با استفاده از $(D'1)$ — $(D'4)$، همان‌طور که خواص مشابهشان را برای ستونها به‌دست‌آوردیم، ثابت کنیم. این خواص را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$(D'5)$ اگر مضرب اسکالری از یک سطر را به سطر دیگـر بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

$(D'6)$ تعویض دو سطر با هم، علامت دترمینان را تغییر می‌دهد.

$(D'7)$ دترمینان ماتریسی که دارای یک سطر صفر باشد، صفر است.

$(D'5)$ مانند $(D5)$ بیشترین‌کاربرد را در محاسبهٔ دترمینانها دارد.

در بعضـی از مثالها، محاسبهٔ دترمینان بـا استفاده از سطرهـا سریعتر از محاسبه با ستونها انجام می‌پذیرد.

مثال ۱ دترمینان زیر را حساب کنید.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

دراین مثال می‌بینیم که سطرهای اول و دوم تقریباً یکسان‌اند. اگر سطردوم را ازسطر اول کم کنیم، داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

تعریف اگر $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ یک ماتریس باشد، **همسازهٔ** (i, j)ام A که با A_{ij} نشان داده می‌شـود، عبـارت اسـت از: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \hat{A}_{ij}$، کـه در آن $\hat{A}_{ij}$ مـاتـریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل از حذف سطر iام و ستون jام A می‌باشد.

مثلاً، اگر $A = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}$، آنگاه

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} = -۷ \quad \text{و} \quad A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۳$$

$$A_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = -۲ \quad \text{و} \quad A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۴$$

با استفاده از این نمادگذاری، می‌توانیم تعریف اصلی دترمینان را به صورت

$$\det A = \sum_{j=۱}^{n} a_{۱j} A_{۱j}$$

بنویسیم.

این فرمول می‌گوید که دترمینان A عبارت است از مجموع حاصلضربهای درایه‌های سطر اول در همسازه‌هـای متناظـرشان. همسازهٔ نظیر $a_{۱j}$ عبارت است از دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر اول و ستون jام ضرب در $(-۱)^{۱+j}$. می‌خواهیم این فرمول را به فرمول زیر گسترش‌دهیم:

$$\det A = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

یعنی، دترمینان A عبارت است از مجموع حاصلضـربهای درایه‌هـای سطر iام در همسازه‌های متناظرشان.

این فرمول را **بسط همسازه‌ای** برحسب سطر iام گـویند و به‌وسیلهٔ آن دترمینان را می‌توان به‌طرق مختلف حساب کرد. برای مثال، در حالت ۳×۳،

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = -a_{۲۱} \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + a_{۲۲} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} - a_{۲۳} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

یا

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = a_{۳۱} \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix} - a_{۳۲} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۳} \end{vmatrix} + a_{۳۳} \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}$$

یک مثال عددی (برحسب سطر دوم) عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} + ۲ \begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} - ۱ \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= (-۳)(-۵) + (۲)(-۴) - (۱)(-۱) = ۸$$

اکنون ثابت می‌کنیم که بسط همسازه‌ای برحسب سطر iام، مقدار درست دترمینان را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱ $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

اثبات گیریم $A = [a_{ij}]$. از ماتریس A، ماتریس B را به صورت زیر به دست می‌آوریم: سطر iام A را با سطر $(i-1)$ام آن عوض می‌کنیم. سپس سطر $(i-1)$ام جدید را با سطر $(i-2)$ام عوض می‌کنیم و به همین ترتیب. نتیجهٔ نهایی این عمل آن است که سطر iام A سطر اول B است و سطرهای اول،...، و $(i-1)$ام A بترتیب سطرهای دوم،...، و iام B خواهند بود. چون ماتریس B، از $(i-1)$ بار تعویض سطرهای A حاصل شد، داریم $\det A = (-1)^{i-1} \det B$. حال ماتریس $\hat{B}_{1j}$ همان ماتریس $\hat{A}_{ij}$ است. چون

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det \hat{B}_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \det \hat{A}_{ij}$$

در نتیجه،

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{A}_{ij} \quad \bullet$$

برای بعضی از دترمینانها، بسط همسازه‌ای برحسب سطری غیر از سطر اول ممکن است سریعترین راه رسیدن به جواب باشد.

مثال ۲

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 30.$$

بسط همسازه‌ای را برحسب ستونها نیز می‌توان نوشت.

قضیهٔ ۲ $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

مثلاً، در حالت 4×4، این فرمول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

اثبات اثبات را به حالت 4×4 محدود می‌کنیم و اثبات حالت کلی را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. بنا به (D1)،

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

با استفاده از (D۲)، می‌توانیم a_{11}، a_{21}، a_{31}، و a_{41} را از ستونهای اول هر یک از دترمینانهای فوق فاکتور بگیریم. با این‌کار ستونهای اول بترتیب به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

درمی‌آیند.

سپس، با افزودن مضرب مناسبی ازستون اول به هریک ازدیگرستونها، خواهیم‌داشت

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

با تعویض سطرها با هم، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\det\hat{A}_{11} + (-1)a_{21}\det\hat{A}_{21} + a_{31}\det\hat{A}_{31} + (-1)a_{41}\det\hat{A}_{41} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}. \end{aligned}$$

●

قضیهٔ زیر را با استفاده از بسطهای همسازه‌ای سطری و ستونی، می‌توان ثابت کرد.

قضیهٔ ۳ $\det A = \det A^T$.

اثبات استدلال به وسیلهٔ استقرا روی n انجام می‌شود. در حالت ۲ × ۲ داریم

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

اگر $A = [a_{ij}]_{(nn)}$، گیریم $B = A^T = [b_{ij}]_{(nn)}$، کـه درآن $b_{ij} = a_{ji}$. توجه

کنید که $\hat{B}_{ij} = \hat{A}^T_{ji}$. بنا به تعریف،

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{j=1}^{n} b_{1j}(-1)^{1+j}\det \hat{B}_{1j}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{j1}(-1)^{1+j}\det \hat{A}^T_{j1}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{j1}(-1)^{1+j}\det \hat{A}_{j1}\end{aligned}$$

مرحلهٔ اخیرمبتنی است برفرض استقرا درمورد ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$.
لذا، با استفاده از بسط همسازه‌ای ستونی A

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} A_{j1} = \det A. \qquad \bullet$$

پس، برای مثال،

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b\\ d & 1 & c\\ e & f & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d & e\\ a & 1 & f\\ b & c & 1\end{vmatrix}$$

تمرینات

۱. دترمینانهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 7\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ -1 & -2 & 3\end{vmatrix}$

(ه) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 0\end{vmatrix}$ (و) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 0 & 1\\ 7 & 0 & 1 & 6\\ 4 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ (ز) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -1 & -3\\ 1 & 6 & 9 & -2\end{vmatrix}$

۲. ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21\\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22\\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23\\ 4 & 9 & 14 & 19 & 24\\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25\end{vmatrix} = 0$$

[راهنمایی: ابتدا سطر چهارم را از سطر پنجم و سپس سطر سوم را از سطر چهارم کم کنید.]

۳. اگر n یک عدد صحیح فرد باشد و A یک ماتریس $n\times n$ به‌طوری که $A^T = -A$، نشان دهیدکه $\det A = 0$.

۴. اگر Q یک ماتریس حقیقی باشد، نشان دهید که $\det QQ^T \geqslant ۰$.

۵. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. فرض کنید که اعداد c و d وجود دارند به طوری که به ازای هر i و هر j، $a_{ij} = ci + dj$. (مثلاً اگر $n = ۲$، $A = \begin{bmatrix} c+d & c+۲d \\ ۲c+d & ۲c+۲d \end{bmatrix}$.) اگر $n > ۲$، نشان دهید که $\det A = ۰$.

۶. اگر سطری از یک ماتریس، مضرب اسکالری از سطر دیگر باشد، نشان دهید که دترمینان آن ماتریس صفر است.

۷. اگر A یک ماتریس متقارن باشد، نشان دهید که

$$\det [A + B] = \det [A + B^T]$$

۸. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} a & b & ۰ & ۰ \\ c & d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & e & f \\ ۰ & ۰ & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. فرض کنید که همهٔ درایه‌های قطری A یکسان و برابر عدد a و همهٔ درایه‌های غیر قطری آن یکسان و برابر عدد b باشند. نشان دهید که $\det A = (a + (n - ۱)b)(a - b)^{n-۱}$. [راهنمایی: ستونهای ۲، ۳، ...، n را به ستون اول بیفزایید. ازستون اول $a + (n - ۱)b$ را فاکتور بگیرید. سپس b برابر ستون اول را از ستونهای ۲، ۳، ...، n کم کنید.]

۱۰. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. ماتریس جدید B را که به طریق زیر حاصل می‌شود، در نظر گیرید: اگر $i + j$ فرد باشد، هر a_{ij} را با $-a_{ij}$ و اگر $i + j$ زوج باشد، هر a_{ij} را با $+a_{ij}$ جایگزین کنید. به‌عبارت دیگر، $B = [(-۱)^{i+j}a_{ij}]$. نشان دهید که $\det B = \det A$.

۱۱. فرض کنید Q یک ماتریس $n \times n$ باشد. اگر $QQ^T = I_n$، نشان دهید که $\det Q = \pm ۱$.

۵ وارون یك ماتریس

به هرماتریس مفروض $A = [a_{ij}]$، ماتریس مفیدی بنام ماتریس **الحاقی کلاسیک** A نسبت داده می‌شود، که آن را با $\mathscr{A}$ نشان می‌دهیم، و به صورت $\mathscr{A} = [A_{ij}]^T$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، ماتریس الحاقی‌کلاسیک A، ترانهاد ماتریس همسازه‌های A است.

برای مثال، اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه‌ماتریس‌همسازه‌ها $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$، و ماتریس الحاقی‌کلاسیک $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ می‌باشد. برای $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۳ \\ ۷ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس‌همسازه‌ها،

$\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۱۹ \\ ۹ & -۶ & ۳ \\ -۳ & ۲۰ & -۱ \end{bmatrix}$، و ماتریس الحاقی کلاسیک $\begin{bmatrix} ۳ & ۹ & -۳ \\ -۲ & -۶ & ۲۰ \\ ۱۹ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ است.

در حالت ۲ × ۲، توجه کنید که

$$A\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & ۰ \\ ۰ & ad-bc \end{bmatrix}$$

همین طور به‌آسانی نشان داده می‌شود که $\mathcal{A}A = (\det A)I_{۲}$.

می‌خواهیم این حکم را بـرای ماتریسهای دلخواه $n \times n$ تعمیم بدهیم ولی ابتدا نیاز به اثبات لم زیر داریم.

لم مجموع حاصلضربهای عناصر یک سطر (ستون) از A در همسازه‌های عناصر متناظر سطر (ستون) دیگری از A، همیشه صفر است.

اثبات مجموع مورد نظر، اساساً دترمینان ماتریسی است که دارای دو سطر (ستون) مساوی است. بنا به (D۴) یا (D'۴)، این دترمینان صفر است. در حالت ۳ × ۳، این را مفصلاً می‌نویسیم.

گیریم $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$. نشان خواهیم داد که مجموع حاصلضربهای عناصر سطراول در همسازه‌های متناظر سطر سوم، صفر است. به‌عبارت دیگر نشان خواهیم داد که $a_{۱۱}A_{۳۱} + a_{۱۲}A_{۳۲} + a_{۱۳}A_{۳۳} = ۰$. به‌جای $A_{۳۱}$، $A_{۳۲}$، و $A_{۳۳}$، تعاریف آنها را برحسب درایه‌های A قرار می‌دهیم. پس از این جایگزینی، می‌بینیم که

$$a_{۱۱}\begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix} - a_{۱۲}\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۳} \end{vmatrix} + a_{۱۳}\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}A_{۳۱} + a_{۱۲}A_{۳۲} + a_{۱۳}A_{۳۳}$$

اما عبارات اخیر برابر است با $\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix}$ که مساوی صفر است. ●

قضیهٔ ۱ گیریم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت

$$A\mathcal{A} = \mathcal{A}A = (\det A)I_n$$

اثبات حاصلضرب $A\mathcal{A}$ را درنظر می‌گیریم

$$A\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ & & \vdots & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & \cdots & A_{n۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & \cdots & A_{n۲} \\ & & \vdots & \\ A_{۱n} & A_{۲n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n} & \cdots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn}\\
a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\cdots+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n} & \cdots & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\cdots+a_{2n}A_{nn}\\
\vdots & & & \vdots\\
a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\cdots+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}+\cdots+a_{nn}A_{2n} & \cdots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}
\end{bmatrix}
$$

بنا به لم، تمام درایه‌های غیرقطری صفرند، ولی هر درایهٔ قطری برابر $\det A$ می‌باشد. بنابراین $A\mathcal{A}=(\det A)I_n$. اثبات مشابهی نشان می‌دهد که $\mathcal{A}A=(\det A)I_n$. ●

قضیهٔ ۲ اگر $\det A\neq 0$، آنگاه A^{-1} وجود دارد و $A^{-1}=(\det A)^{-1}\mathcal{A}$.

اثبات با انتخاب $B=(\det A)^{-1}\mathcal{A}$، داریم $AB=BA=I_n$. لذا، A^{-1} وجوددارد و برابر با B است. ●

بنابراین، دترمینان به‌طور دقیق نشان می‌دهد که یک ماتریس وارون دارد یا خیر. یک ماتریس وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر دترمینانش غیر صفر باشد. همچنین دترمینان روشی (نه الزاماً کاراترین روش) برای محاسبهٔ وارون ارائه می‌دهد.

مثال ۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $ad-bc\neq 0$، آنگاه

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

مثال ۲ اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3\\ 7 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$، آنگاه $\det A=54$ و نیز $\mathcal{A}=\begin{bmatrix} 3 & 9 & -3\\ -2 & -6 & 20\\ 19 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

بنابراین $A^{-1}=\frac{1}{54}\begin{bmatrix} 3 & 9 & -3\\ -2 & -6 & 20\\ 19 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

مثال ۳ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & x & 0\\ -x & 1 & x\\ 0 & -x & 1\end{bmatrix}$، آنگاه

$$\det A=1\times(1+x^2)+(-x)(-x)=1+2x^2.$$

پس اگر x حقیقی باشد، A وارون‌پذیر است. ماتریس همسازه‌های A عبارت است از:

$\begin{bmatrix} 1+x^2 & x & x^2\\ -x & 1 & x\\ x^2 & -x & 1+x^2\end{bmatrix}$. بنابراین $A^{-1}=\frac{1}{1+2x^2}\begin{bmatrix} 1+x^2 & -x & x^2\\ x & 1 & -x\\ x^2 & x & 1+x\end{bmatrix}$

تمرینات

(فرض کنید تمام ماتریسهای زیر مربعی باشند.)

۱. وارون هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(ه) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ز) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

۲. اگر $A = G_1 G_2 \ldots G_n$ وارون‌پذیر باشد، نشان‌دهیدکه G_1، G_2، . . .، G_n وارون‌پذیرند.

۳. نشان دهید

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

۴. اگر

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که

$$Q^{-1} = \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)} Q^T$$

۵. اگر $\det A \neq 0$ و $AB = AC$، نشان دهید که $B = C$.

۶. اگر $AB = I_n$، نشان دهید که A^{-1} وجود دارد و برابر است با B.

۷. اگر AB یک مضرب غیر صفر ماتریس همانی باشد، نشان دهید که $AB = BA$.

۸. اگر A و B دو ماتریس غیر صفر باشند و $AB = 0$، نشان دهید که $\det A = 0$ و $\det B = 0$.

۹. اگر $P^2 = P$ و $P \neq I_n$، نشان دهید که $\det P = 0$.

۱۰. فرض کنید $P^2 = P$. اگر $\lambda \neq 1$، ثابت کنید که $I_n - \lambda P$ وارون‌پذیر است و

$$(I_n - \lambda P)^{-1} = I_n + (\lambda/(1-\lambda))P$$

۱۱. فرض‌کنید A یک ماتریس متقارن با همسازه‌های A_{ij} باشد. نشان دهید که $A_{ij} = A_{ji}$.

۱۲. نشان دهید که یک ماتریس بالا مثلثی وارون‌پذیراست اگر و فقط اگر تمام درایه‌های قطری‌آن غیر صفر باشند.

۱۳. معین کنید که به ازای چه مقداری از x، هر یک از ماتریسهای زیر وارون‌پذیر است و وارون را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & x \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -x & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} x & -۱ & ۰ \\ -۱ & x & -۱ \\ ۰ & -۱ & x \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ۰ & x & ۱ \\ ۱ & ۰ & x \\ x & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۴. ماتریسهای ۲ × ۲ای مانند X و Y بیابید به طوری که

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۵. اگر a، b، و c اعدادی حقیقی باشند، نشان‌دهیدکه $\begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ -a & ۱ & c \\ -b & -c & ۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است و وارون‌آن را محاسبه کنید.

۱۶. فرض کنید A و B ماتریسهای متقارن وارون پذیر باشند به‌طوری که $AB = BA$. نشان دهیدکه AB، $A^{-۱}B$، $AB^{-۱}$، و $A^{-۱}B^{-۱}$ متقارن‌اند.

۱۷. اگر یک ماتریس بالامثلثی وارون داشته باشد، نشان دهیدکه وارون‌آن نیز بالامثلثی است.

۱۸. فرض کنید که A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و $AB = I_n$. نشان دهید که A وارون‌پذیر است و $B = A^{-۱}$.

۱۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که همهٔ درایه‌های‌آن اعداد صحیح هستند. نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

(الف) $\det A = \pm ۱$.

(ب) همهٔ درایه‌های $A^{-۱}$ اعداد صحیح‌اند.

۲۰. در هر یک از موارد زیر، ماتریس ۲ × ۲ای چون X بیابید که در معادلهٔ مربوطه صدق کند.

(الف) $$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲۱. فرض کنید U ماتریسی با خاصیت $\det U = ۱$، و U_{ij} همسازهٔ (i, j) آن باشد. نشان دهید که $u_{ij} = U_{ij}$ اگر و فقط اگر $UU^T = I_n$.

۲۲. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، X، و Y ماتریسهایی $n \times n$ وسه ماتریس اولی وارون‌پذیر باشند. اگر $Y = A_۱XA_۲XA_۳$، نشان دهید که Y وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر X وارون‌پذیر باشد.

۲۳. چند ماتریس ۲ × ۲ی وارون‌پذیر وجوددارد که درایه‌های آنها فقط ۰ و ۱ باشند؟

۶ قاعدهٔ کرامر[1]

در این بخش، ازمفهوم وارون ماتریس جهت ارائهٔ فرمول مشروحی برای حل یک دستگاه n معادلهٔ خطی n مجهولی، مشروط بـر آنکه دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد، استفاده می‌کنیم. این امر، هم ازلحاظ تاریخی وهم به‌طورکلی جالب توجه است، اما درعمل چندان کارایی ندارد. درمسائل واقعی، روش حذفی گـاوسی برای حل دستگاههای معادلات خطی روش کاراتری است.

گیریم دستگاه مورد نظر به‌صورت

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

باشد.

فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ ماتریس ضرایب و $\mathbf{x} = [x_i]_{(n1)}$ بردارمجهولات این دستگاه باشند، و $\mathbf{b} = [b_i]_{(n1)}$. دراین‌صورت، دستگاه با نمادماتریسی به‌صورت زیرنوشته می‌شود.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

اگر $\det A \neq 0$، مـی‌دانیم که A^{-1} وجود دارد. گیریم $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} A(A^{-1}\mathbf{b}) &= (AA^{-1})\mathbf{b} \\ &= I_n\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

لذا، این دستگاه معادلات، حل پذیر است و جواب‌آن $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ می‌باشد.

همچنین جواب یکتا ست. زیرا اگر $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای دو جواب $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \mathbf{b} = A\mathbf{x}_2 \\ A\mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}_1) &= A^{-1}(A\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول مشروحی که در بخش ۵.۳ برای وارون ماتریس به دست آمد، می‌بینیم که

1. Cramer

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11}A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12}A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \vdots & \\ A_{1n}A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}\end{bmatrix}$$

اگر بنویسیم $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ و بسطهای همسازه‌ای را به‌کار بریم، جوابها را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x_1 = \frac{\det[\mathbf{b}, A_2, A_3, \cdots, A_n]}{\det[A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n]} = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det[A_1, \mathbf{b}, A_3, \cdots, A_n]}{\det[A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n]} = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{\det A}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\det[A_1, A_2, \cdots, \mathbf{b}]}{\det[A_1, A_2, \cdots, A_n]} = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{\det A}$$

این روش حل دستگاههای خطی را **قاعدهٔ کرامر** می‌نامند. برای مثال، در حالت 3×3، داریم:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

در حالت خاص، اگر مقادیر طرف راست دستگاه صفر باشند، یعنی $\mathbf{b} = 0$، یا به عبارت دیگر، اگر یک دستگاه معادلات همگن داشته باشیم، می‌بینیم که چنانچه دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد، $\mathbf{x} = 0$ تنها جواب معادلهٔ $A\mathbf{x} = 0$ است.

در عمل، استفاده از قاعدهٔ کرامر مستلزم وارون کردن ماتریس ضرایب با استفاده از فرمول بخش قبلی است. مثالهایی در این باره می‌آوریم.

مثال۱ دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = y_2$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = y_3$$

ماتریس ضرایب یعنی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ را وارون می‌کنیم. ابتدا، داریم:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

حال

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

و همین طور الی آخر. بنابراین، درمی‌یابیم که ماتریس همسازه‌ها $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

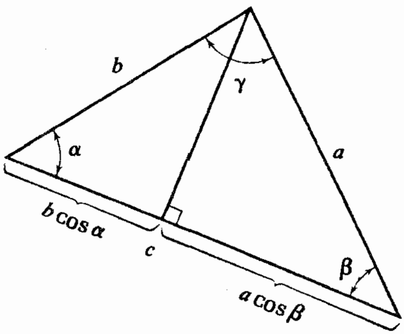
است، و $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. در نتیجه

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_1 + y_3 \\ y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲ قانون کسینوسها را به‌دست می‌آوریم.

مثلثی را درنظر می‌گیریم که اضلاع آن a، b، و c، و زوایای مقابل این اضلاع α، β، و γ هستند (ر. ک. شکل ۱.۳). با استفاده از تعاریف مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} c(\cos\beta) + b(\cos\gamma) &= a \\ c(\cos\alpha) \qquad\qquad + a(\cos\gamma) &= b \\ b(\cos\alpha) + a(\cos\beta) \qquad\qquad &= c \end{aligned}$$



شکل ۱.۳

می‌خواهیم ایـن دستگاه را بـر حسب $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و $\cos\gamma$ حـل کنیم. یعنی، می‌خواهیم ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

را وارون کنیم. دترمینان ایـن ماتریس $2abc$ است. بنابـرایـن A وارون‌پذیر است اگر $a\neq 0$، $b\neq 0$، و $c\neq 0$، که مسلماً در مثلث این شرایط برقرار است.

در این حالت

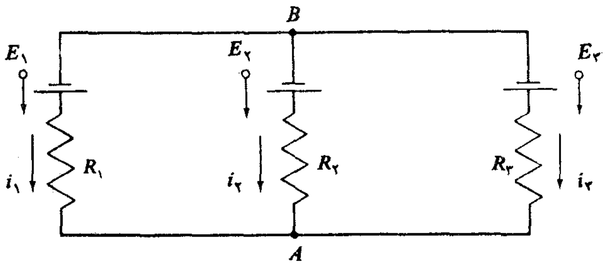
$$A^{-1}=\frac{1}{2abc}\begin{bmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\cos\alpha=\frac{-a^3+ab^2+ac^2}{2abc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$\cos\beta$ و $\cos\gamma$ نیز به صورت عبارات مشابهی به دست می‌آیند.

مثال ۳ شکل زیر، نمودار یک مدار سادهٔ الکتریکی است.



E_1، E_2، و E_3 معرف سه منبع تولید الکتریسیته، مثلاً باطری و یا مولد می‌باشند و R_1، R_2، و R_3 سه مقاومت هستند. این مقاومتها انرژی الکتریکی را به گرما تبدیل می‌کنند. درعمل، ممکن است بخاری برقی یا اجاق برقی باشند. کمیتهای i_1، i_2، و i_3 معرف جریان الکتریکی در هر شاخه از دستگاه می‌باشند. Eها را با ولت، Rها را بـا اهم و iها را با آمپر، که می‌تواند منفی باشد (وقتی که جریان درخلاف جهتی باشد که پیکان نشان می‌دهد)، اندازه‌گیری می‌کنند.

وقتی Eها و Rها داده شده باشند، می‌توان iها را به وسیلهٔ قوانین کیرشهوف محاسبه کرد. این قوانین عبارت‌اند از:

(۱) حاصلجمع جبری تمام جریانهایی که به یک انشعاب می‌رسند باید صفر باشد.

(به عبارت دیگر، کل جریانی که به یک انشعاب وارد می‌شود باید از آن خارج گردد.)

(۲) درهرمدار بسته‌ای از شبکه، حاصلجمع جبری Eها (منابع اختلاف‌پتانسیل) باید برابر حاصلجمع جبری Ri ها (منابع افت پتانسیل) باشد.

توجه کنید که جریانهای i_1، i_2، و i_3 همگی به انشعاب Aی مدار وارد می‌شوند. از قانون اول نتیجه می‌شود که $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. و نیز دقت کنید که استفاده از این قانون درانشعاب B همین معادله را می‌دهد. با دورزدن حلقهٔ اول درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، دیده می‌شود که حاصلجمع جبری Eها برابراست با $E_2 - E_1$. حاصلجمع‌جبری جملات Ri برابر $R_2i_2 - R_1i_1$ است. لذا، بنا به قانون دوم داریم:

$$-R_1i_1 + R_2i_2 = E_2 - E_1.$$

از حلقهٔ دوم، خواهیم داشت: $-R_2i_2 + R_3i_3 = E_3 - E_2$. پس دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -R_1i_1 + R_2i_2 &= E_2 - E_1 \\ -R_2i_2 + R_3i_3 &= E_3 - E_2 \end{aligned}$$

را داریم، که‌آن را به صورت

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_2 - E_1 \\ E_3 - E_2 \end{bmatrix}$$

می‌نویسیم.

با انجام محاسبه، درمی‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \begin{bmatrix} R_2R_3 & -R_2 - R_3 & -R_2 \\ R_1R_3 & R_3 & -R_1 \\ R_1R_2 & R_2 & R_1 + R_2 \end{bmatrix}$$

به‌این ترتیب، می‌توانیم مقدار جریان هرشاخه را برحسب Rها و Eها بیان کنیم.

تمرینات

۱. دستگاههای زیر را حل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x - y + 3z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 7 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 1 \\ -x + 2y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} 2x + 8y + z &= 10 \\ -x + 3y + 2z &= -2 \\ 4x + 4y - 5z &= 4 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

۲. با محاسبهٔ وارون ماتریس ضرایب، دستگاههای زیر را حل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= a \\ x + 2y + 3z &= b \\ 3x - y + 2z &= c \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= a \\ -x + 3y - 2z &= b \\ 2x - y + z &= c \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= y_3 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= y_1 \\ 2x_1 - x_2 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_3 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

۳. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

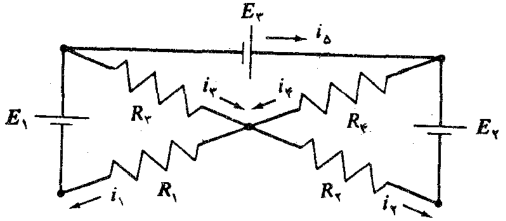
$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha + \beta t \\ cx + dy &= \gamma + \delta t \end{aligned}$$

که درآن $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$، $\beta^2 + \delta^2 = 0$، و t یک پارامتر است. نشان دهید وقتی که t تغییر می‌کند، مجموعهٔ جوابها، یک خط راست است. نشان دهیدکه این‌خط درامتداد بردار $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}$ است.

۴. سه ذره از مبدأ حرکت کرده در امتداد یک خط راست با سرعت ثابت پیش می‌روند. مکان‌آنها، به‌عنوان تابعی از زمان، با روابط $\mathbf{r}_1(t) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})t$، $\mathbf{r}_2(t) = (\mathbf{i} + \mathbf{j})t$، $\mathbf{r}_3(t) = (3\mathbf{i} + \mathbf{j})t$ معین می‌شود. فرض کنید $\mathbf{s}(t)$ نقطه‌ای باشد که در زمان t به فاصلهٔ مساوی از سه ذره قرار دارد. $\mathbf{s}(t)$ را بیابید. [راهنمایی: معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-A/2, -B/2)$ به‌صورت $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ است. A، B، و C را در زمان t پیدا کنید به‌طوری که نقاط انتهایی این سه بردار روی دایره باشند.]

۵. سه جسم با جرمهای m_1، m_2، و m_3، بترتیب در نقاط $(-1, 1)$، $(-1, -1)$، و $(2, 1)$ قرار دارند. فرض کنید که مرکزثقل این دستگاه درنقطهٔ $(0, 0)$ وحاصلجمع جرمها برابر یک باشد. جرمهای m_1، m_2، و m_3 را بیابید.

۶. در شبکهٔ الکتریکی



کاربست قوانین کیرشهوف معادلات زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}
i_1 \quad - \quad i_3 \qquad - i_5 &= 0\\
i_2 \qquad - i_4 + i_5 &= 0\\
R_1 i_1 \quad + R_3 i_3 \qquad &= E_1\\
R_2 i_2 \qquad + R_4 i_4 &= E_2\\
- R_3 i_3 + R_4 i_4 &= E_3
\end{aligned}$$

نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & 0 & R_1 \\ 0 & R_2 + R_4 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

و ماتریس را وارون کنید.

۷. فرض‌کنید $A = [a_{ij}]$، $B = [b_{ij}]$، $C = [c_{ij}]$، و $D = [d_{ij}]$ ماتریسهایی 2×2 باشند. فرض کنید $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$، ۲-بردار باشند. نشان دهید که معادلات

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} + B\mathbf{y} &= \mathbf{r}\\ C\mathbf{x} + D\mathbf{y} &= \mathbf{s} \end{aligned}$$

را همیشه می‌توان نسبت به ۲-بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ حل کرد اگر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

۷ حذف ترکیبی

فرمولی که در بخش ۵.۳ برای محاسبهٔ وارون ماتریس ارائه شد، از لحاظ محاسباتی کارایی خیلی‌کمی دارد. فایدهٔ فرمول مزبور عمدتاً دراین است که اثباتی برای وجود A^{-1}، اگر $\det A \neq 0$، به‌دست می‌دهد. روش عملی‌تری که برای وارون‌کردن ماتریس وجود دارد، روش **حذف ترکیبی** است، که اکنون‌آن را شرح می‌دهیم.

فرض‌کنیم‌ماتریس $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ داده‌شده‌است. دستگاه معادلات‌زیررادرنظرمی‌گیریم:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_n
\end{aligned}$$

که درآن x_1، x_2، . . .، x_n مجهول و y_1، y_2، . . .، y_n متغیرنـد. برای حل این دستگاه با روش حذفی گاوسی، فقط اعمـال ضرب یک معادله در یک مقدار ثابت غیر صفر وافزودن مضارب اسکالری از یک معادله به معادلهٔ دیگر، را انجام می‌دهیم. لذا، اگر $\det A \neq 0$، دستگاه قابل حل است و جوابها به صورت

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{aligned}$$

می‌باشند. گیریم $B = [b_{ij}]_{(nn)}$. نشان خواهیم داد که B وارون A است.

ملاحظه می‌کنیم که اگر $\mathbf{x}$ بردار دلخواهی باشد، داریم $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ و $B\mathbf{y} = \mathbf{x}$. در نتیجه برای هر بردار $\mathbf{x}$، داریم $BA\mathbf{x} = \mathbf{x}$، یا $(BA - I_n)\mathbf{x} = 0$. اکنون لمی را ثابت می‌کنیم که برقراری تساوی $BA - I_n = 0$ را تضمین می‌کند.

لم اگر C یک ماتریس $m \times n$ باشد و به ازای هر n-بردار $\mathbf{x}$ داشته باشیم $C\mathbf{x} = 0$. آنگاه $C = 0$.

اثبات گیریم $C = [c_{ij}]_{(mn)}$؛ در این صورت

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}$$

بنا به فرض،

$$C\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

پس، $c_{11} = c_{21} = \cdots = c_{m1} = 0$. به‌روشی مشابه، با ضرب متوالی C در n-بردارهای

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

درمی‌یابیم که همهٔ ستونهای دیگر صفرند. ●

لذا، می‌بینیم که $BA = I_n$. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $AB = I_n$. بنابراین $B = A^{-1}$.

مثال ۱ در بخش قبلی، وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ را با روش نسبتاً خسته‌کننده‌ای که مستلزم محاسبهٔ تمام همسازه‌ها بود، به دست آوردیم. اکنون، وارون آن را با روش

حذف ترکیبی می‌یابیم. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= y_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم. معادلهٔ اول و مجهول x_1 را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ -2x_3 &= y_2 - y_1 \\ -2x_2 - 2x_3 &= y_3 - y_1 \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم و مجهول x_3 را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ x_3 &= \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ -2x_2 &= y_3 - y_2 \end{aligned}$$

معادلهٔ سوم و مجهول x_2 را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 &= \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{aligned}$$

لذا، $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. در مورد ماتریسهای بزرگتر، کارایی این روش بیشتر است.

مثال ۲ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

را وارون می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= y_1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= y_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

مجهول x_1 و معادلهٔ اول را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= y_1 \\
x_2 + x_4 &= -y_1 + y_2 \\
-3x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_3 \\
-x_2 - 2x_3 &= -y_1 + y_4
\end{aligned}$$

مجهول x_2 و معادلهٔ دوم را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_3 - x_4 &= 3y_1 - 2y_2 \\
x_2 + x_4 &= -y_1 + y_2 \\
-3x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_3 \\
-2x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_2 + y_4
\end{aligned}$$

مجهول x_4 و معادلهٔ سوم را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\
x_2 + 3x_3 &= y_1 + y_2 - y_3 \\
-3x_3 + x_4 &= -2y_1 + y_3 \\
x_3 &= y_2 - y_3 + y_4
\end{aligned}$$

مجهول x_3 و معادلهٔ چهارم را به‌کار می‌بریم.

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\
x_2 &= y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 \\
x_4 &= -2y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 3y_4 \\
x_3 &= y_2 - y_3 + y_4
\end{aligned}$$

در نتیجه
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

تمرینات

۱. وارون هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ه) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & -5 & 14 \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۵ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۲ & ۱۴ \\ ۲ & ۲ & -۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$ (ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۲. درمورد هر یک از ماتریسهای Aی زیر، به ازای چه مقداری از x، ماتریس $xI - A$ وارون‌پذیر است؟ وارون $xI - A$ کدام است؟

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۳. با استفاده ازحذف ترکیبی وارون ماتریس زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & a_n \\ \lambda_۲ & ۱+\lambda_۲ a_۲ & \lambda_۲ a_۳ & \cdots & \lambda_۲ a_n \\ \lambda_۳ & \lambda_۳ a_۲ & ۱+\lambda_۳ a_۳ & \cdots & \lambda_۳ a_n \\ & & \vdots & & \\ \lambda_{n-۱} & \lambda_{n-۱} a_۲ & \lambda_{n-۱} a_۳ & \cdots & \lambda_{n-۱} a_n \\ \lambda_n & \lambda_n a_۲ & \lambda_n a_۳ & \cdots & ۱+\lambda_n a_n \end{bmatrix}$$

۴. گیریم A یک ماتریس $n \times n$ باشد که دارای یک و فقط یک درایهٔ غیر صفر در هر سطر و هر ستون است. نشان دهید کـه A وارون پذیر است و وارون آن ماتریسی از نـوع A است.

۵. مـاتـریـس مثال ۳ از بخش ۵.۲ را وارون کنید. اگـر در آن مثال، $n_۱ = ۱۳۰۰$، $n_۲ = ۱۰۰۰$، $n_۳ = ۶۰۰$، و $n_۴ = ۳۰۰$؛ یک سال قبل، چند عضو در گروههای سنی مختلف وجود داشته است؟

۶. وارون هریک از ماتریسهای $n \times n$ زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & -۱ \\ & & & \vdots & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ & ۰ \\ & & & \vdots & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۷. وارون ماتریس $n \times n$ زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۸. اگر $a \neq 0$، وارون ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

را بیابید.

۴

فضاهای برداری

۱ تعریف فضای برداری

در یکی از فصلهای قبلی، قواعدی بـرای جمع، و ضرب اسکالر بردارها و ماتریسها ارائه دادیم. دیدیم که این اعمال ازقوانینی پیروی می‌کنند که‌با استفاده ازآنها می‌توانیم عملیات جبری‌را، بدون رجوع مستمر به تعاریف‌اصلی، انجام دهیم. دراین فصل، موجودات مجردی به نام فضاهای برداری را مطالعه می‌کنیم کـه برای آنها اعمال جمع، و ضرب اسکالر نیز تعریف شده‌اند: این اعمال در همان قـواعد جمع، و ضرب اسکالر، که در فصل دوم بـرای بردارها ارائه شد، صدق می‌کنند.

این اشیاء را به‌طور مجرد مطالعه می‌کنیم و بـرای پروراندن نظریهٔ فضای برداری فقط از اصول بنیادی استفاده می‌نماییم. با اتخاذ چنین روشی، اثبات بسیاری از قضایـا را ساده و واضح می‌سازیم، و به‌علاوه به گسترهٔ وسیعی از حـوزهٔ کاربرد نتایج مربـوطه دست می‌یابیم.

بنابراین، درسراسر این فصل، مجموعه‌هایی از اشیاء موسوم به بردار را، فقط به‌این علت بررسی می‌کنیم که برای چهارچوب مجردبحث ما مناسب‌اند. بردارهای ستونی، چند-جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x، ماتریسها، و توابع روی یک فاصله، همگی ممکن است بردار نامیده شوند، زیرا پس از ارائهٔ تعاریف بخصوصی، می‌بینیم کـه هرکدام، عضوی از یک مجموعه است که می‌تواند به‌عنوان یک فضای برداری درنظر گرفته شود.

فضای برداری، مجموعه‌ای‌مانند V است‌مرکب ازاشیائی به‌نام‌بردار، بادوعمل تعریف-شده برروی آن: جمع، وضرب اسکالر. جمع بردارها به‌این معنی است‌که با مفروض بودن دوبردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در V، قاعده‌ای وجود دارد که برداری مانند $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ را، که آن نیز در V است، معین می‌کند، و این بردار را **حاصلجمع** $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ می‌نامند. منظورمان از ضرب‌اسکالر، قاعده‌ای است که به هر بردار $\mathbf{x}$ در V وهر اسکالر حقیقی α، یک بـردار $\alpha\mathbf{x}$ در V نسبت

می‌دهد. این بردار را **مضرب اسکالر** بردار $\mathbf{x}$ با ضریب اسکالر α می‌نامند.

برای مثال، اگر مجموعهٔ V، گردآوردهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب حقیقی باشد، می‌توانیم حاصلجمع $f + g$ از دو چند جمله‌ای f و g را به صورت حاصلجمع معمولی در نظر بگیریم. ضرب اسکالر را می‌توانیم به صورت ضرب یک‌عدد α دریک چندجمله‌ای f، به‌حساب آوریم، که حاصل‌آن αf است و برای اینکه ثابت کنیم V یک فضای برداری است، باید تحقیق کنیم که اعمال جمع، و ضرب اسکالر در اصول خاصی، که در زیر می‌آوریم، صدق می‌کنند. البته، می‌توان جمع، و ضرب اسکالر بردارها را با قواعد دیگری تعریف کرد، ولی اگر بخواهیم که مجموعهٔ چند جمله‌ایها یک فضای برداری بسازند، اعمال جدید باید در همهٔ اصول یک فضای برداری صدق کنند.

گیریم V مجموعه‌ای باشد که برای آن جمع، و ضرب اسکالر بردارها تعریف شده‌اند، و گیریم $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ متعلق به V، و α و β اعدادی حقیقی باشند. اصول فضای برداری عبارت‌اند از:

(V۱) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (قانون جابجایی برای جمع بردارها.)

(V۲) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (قانون انجمنی برای جمع بردارها.)

(V۳) عنصری در V وجود دارد، که آن را با $\mathbf{o}$ نشان می‌دهیم، به طوری که $\mathbf{o} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$.

(V۴) برای هر $\mathbf{x}$ در V، یک عنصر $-\mathbf{x}$ در V وجود دارد به طوری که $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{o}$.

(V۵) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

(V۶) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

(V۷) $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

(V۸) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

مجموعه‌ای مانند V را که اعمال تعریف شده برآن در فهرست شرایط فوق صدق کنند، **فضای برداری حقیقی** یا **فضای برداری روی اعداد حقیقی** می‌خوانند. بردار $\mathbf{o}$ را، که وجودش در V به‌عنوان اصل پذیرفته شده است، **بردار صفر**، و بردار $-\mathbf{x}$ را **منفی (یا قرینهٔ)** بردار $\mathbf{x}$ می‌نامند.

فضای برداری مختلط به‌طریق مشابه تعریف می‌شود. فقط این را به‌عنوان اصل می‌پذیریم که مضرب اسکالر بردار $\mathbf{x}$ با ضریب اسکالر α برای هر $\mathbf{x}$ در V وهرعدد مختلط α، تعریف شده است.

اهمیت مفهوم فضای برداری از فهرست وسیع مثالهای اشیائی که در اصول فضای برداری صدق می‌کنند، بخوبی روشن می‌شود.

مثال ۱ گیریم $\mathbf{R}^n$ فضای n-بردارهای ستونی با جمع، وضرب اسکالری که در فصل دوم تعریف شده، باشد.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mu \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\alpha_1 \\ \mu\alpha_2 \\ \vdots \\ \mu\alpha_n \end{bmatrix}$$

در اینجا خواننده می‌تواند به عنوان یک تمرین مفید، اثباتهای مربوطه از فصل ۲ را تکرار کند تا نشان دهد که جمع، و ضرب اسکالری که در فوق تعریف شد، در اصول لازمهٔ فضای برداری صدق می‌کنند.

$\mathbf{R}^n$ را به طرق مختلف، می‌توان الگویی برای فضای برداری حقیقی در نظر گرفت. اصول فضای برداری با مشخص کردن مهمترین خواص جمع، و ضرب اسکالر بردارهای ستونی فرمولبندی شد. ازاین خواص جهت اثبات قضایای کلی‌تری، شبیه به آنهایی که در $\mathbf{R}^n$ برقرارند، استفاده می‌شود. و به‌علاوه، به مفهومی که بعداً روشن خواهد شد، فضاهای برداری حقیقی که «خیلی بزرگ» نباشند، از لحاظ جبری به طور طبیعی هم ارز با $\mathbf{R}^n$ می‌باشند (n، عددی صحیح است).

مثال ۲ فضای n-بردارهای ستونی مختلط یک فضای برداری مختلط است، که آن را با $\mathbf{C}^n$ نشان می‌دهند. عمل جمع به صورت

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، که درآن α_1، α_2، . . .، α_n، β_1، β_2، . . .، β_n اعداد مختلط هستند، و ضرب اسکالر به صورت

$$\mu \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\alpha_1 \\ \mu\alpha_2 \\ \vdots \\ \mu\alpha_n \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، که درآن μ یک اسکالر مختلط است.

به همان‌صورت که $\mathbf{R}^n$ الگوی فضای برداری حقیقی است، $\mathbf{C}^n$ الگوی فضای‌برداری مختلط می‌باشد.

مثال ۳ گیریم M_{mn} نشانگر گردآوردهٔ ماتریسهای $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. جمع، وضرب اسکالر همانند بخش ۳.۲ تعریف شده است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \cdots & \mu a_{2n} \\ & & \vdots & \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \cdots & \mu a_{mn} \end{bmatrix}$$

برای اینکه نشان دهیم M_{mn} یک فضای برداری است، لازم است بررسی کنیم که اصول (V۱)ـ(V۸) فضای برداری برقرارند. همهٔ این قوانین در بخش ۳.۲ بیان شد و تعدادی از آنها ثابت گردید. چون nـبردارهای ستونی همان ماتریسهای $n \times 1$ هستند، مثال ۱ حالت خاصی ازاین مثال است.

مثال ۴ گیریم P_n نشانگر گردآوردهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی و با درجهٔ نابیشتر از n باشد. اگر f و g متعلق به P_n باشند، آنها را به طریق معمولی با هم جمع می‌کنیم: فرض می‌کنیم

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{و} \quad g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

در این صورت

$$f + g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k.$$

به همین ترتیب، ضرب اسکالر نیز به‌طریق معمولی تعریف می‌شود:

$$\alpha f = \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k$$

برای اینکه برقراری اصول فضای برداری را در این مورد بتفصیل تحقیق کنیم، فرض می‌کنیم

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ ، } g = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ ، } h = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

و α، β اسکالرهای حقیقی باشند.

اکنون بررسی می‌کنیم که اصول (V۱)–(V۸) برقرارند. جهت اثبات برقراری (V۱) باید نشان دهیم که $f + g = g + f$. در مورد (V۲) باید صحت $(f + g) + h = f + (g + h)$ را بررسی کنیم و الی آخر. البته، هرکس با کمی تجربهٔ ریاضی تشخیص می‌دهد که این قواعد برقرارند. معهذا، همهٔ آنها را به‌طور مشروح تحقیق می‌کنیم.

(V۱)
$$f + g = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k$$

$$g + f = \sum_{k=0}^{n} (b_k + a_k)\, x^k$$

چون a_k و b_k اعداد حقیقی‌اند، $a_k + b_k = b_k + a_k$، و لذا خواهیم داشت $f + g = g + f$.

(V۲)
$$(f + g) + h = \sum_{k=0}^{n} ((a_k + b_k) + c_k)\, x^k$$

$$f + (g + h) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + (b_k + c_k))\, x^k$$

چون a_k، b_k، و c_k اعداد حقیقی‌اند، داریم $(a_k + b_k) + c_k = a_k + (b_k + c_k)$، و لذا $(f + g) + h = f + (g + h)$.

(V۳) گیریم ۰ چند جمله‌ای صفر باشد، یعنی، چند جمله‌ای که همهٔ ضرایبش صفر است. دراین صورت $f + 0 = 0 + f = f$.

(V۴) اگر

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ ، قرار می‌دهیم } -f = \sum_{k=0}^{n} (-a_k)\, x^k$$

آنگاه

$$f + (-f) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + (-a_k))\, x^k = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k = 0$$

(V۵) بنا به تعریف،

$$(\alpha + \beta) f = \sum_{k=0}^{n} (\alpha + \beta)\, a_k x^k$$

درعین حال

$$\beta f = \sum_{k=0}^{n} \beta a_k x^k \text{ ، } \alpha f = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k$$

و لذا

$$\alpha f + \beta f = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta a_k)\, x^k$$

در مورد اعداد حقیقی، می‌دانیم که $(\alpha + \beta)\, a_k = \alpha a_k + \beta a_k$، و بنابراین $(\alpha + \beta)\, f = \alpha f + \beta f$.

(V۶) داریم $f + g = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$، ولذا $\alpha(f+g) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha(a_k+b_k)) x^k$. همچنین $\alpha f + \alpha g = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \alpha b_k)\, x^k$. چون $\alpha(a_k + b_k) = \alpha a_k + \alpha b_k$، داریم $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

(V۷) بنا به تعریف، $\beta f = \sum_{k=0}^{n} (\beta a_k)\, x^k$، پس $\alpha(\beta f) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha(\beta a_k))\, x^k$، درعین‌حال $(\alpha\beta) f = \sum_{k=0}^{n} ((\alpha\beta) a_k) x^k$. ولی در اعداد حقیقی داریم $\alpha(\beta a_k) = (\alpha\beta) a_k$، و بنابراین $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$.

$$۱ \cdot f = \sum_{k=0}^{n} (۱ \cdot a_k)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f\ . \qquad (V۸)$$

بنابراین، چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از n، با ضرایب حقیقی، و با جمع، و ضرب اسکالر آن طور که در بالا تعریف شد، یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهند. به همین علت، تمام قضایایی که دربارهٔ فضاهای برداری در حالت کلی ثابت می‌شود، درمورد فضای برداری چند جمله‌ایها نیز برقرار است.

به روشی مشابه، می‌توان نشان داد که چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از n، با ضرایب مختلط، و تحت اعمال جمع، و ضرب اسکالر معمولی، یک فضای برداری مختلط تشکیل می‌دهند.

درمثالهای فوق، جمع و ضرب، به تعبیری «طبیعی» اند. در بیشتر مثالهایی که بعد ازاین می‌آید، چنین خواهدبود. لکن، می‌توان فضاهایی برداری ساخت‌که درآنها برقراری این اصول چندان واضح نیست. برای ملاحظهٔ قاعدهٔ کلیی که در مثال ۵ نهفته است، به تمرین ۷ درآخر همین بخش مراجعه کنید.

مثال ۵ برروی زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y) یک عمل جمع تعریف می‌کنیم، که برای تمایز آن با جمع معمولی، آن را با $\oplus$ نشان می‌دهیم.

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + ۱, y + y' + ۱)$$

ضرب اسکالر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x + \alpha - ۱, \alpha y + \alpha - ۱)$$

اکنون برقراری (V۱) — (V۸) را بررسی می‌کنیم.

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + ۱, y + y' + ۱) \qquad (V۱)$$
$$(x', y') \oplus (x, y) = (x' + x + ۱, y' + y + ۱)$$

چون $x + x' + ۱ = x' + x + ۱$ و $y + y' + ۱ = y' + y + ۱$، می بینیم‌که $(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y)$.

$$((x,y) \oplus (x',y')) \oplus (x'',y'') = (x + x' + ۱, y + y' + ۱) \oplus (x'',y'') \quad (V۲)$$
$$= (x + x' + x'' + ۲, y + y' + y'' + ۲)$$
$$(x, y) \oplus ((x', y') \oplus (x'', y'')) = (x,y) \oplus (x' + x'' + ۱, y' + y'' + ۱)$$
$$= (x + x' + x'' + ۲, y + y' + y'' + ۲)$$

لذا

$$((x, y) \oplus (x', y')) \oplus (x'', y'') = (x, y) \oplus ((x', y') \oplus (x'', y'')).$$

(V۳) عنصر صفر فضا کدام است؟ مشاهده می‌کنیم که

$$(x, y) \oplus (-۱, -۱) = (x + (-۱) + ۱, y + (-۱) + ۱)$$
$$= (x, y)$$

بنابراین، می بینیم که $(-۱, -۱)$ نقش عنصر صفر را بازی می‌کند.

(V۴) قرینهٔ هر (x, y) مفروض را $(-x-۲, -y-۲)$ می‌گیریم، زیرا

$$(x, y) \oplus (-x-۲, -y-۲) = (x + (-x-۲) + ۱, y + (-y-۲) + ۱)$$
$$= (-۱, -۱)$$

که عنصر صفر است.

(V۵) (بنا به تعریف $*$)

$$(\alpha + \beta) * (x, y)$$
$$= ((\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta) - ۱, (\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta) - ۱)$$

همچنین، بنا به تعریف $*$،

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x + \alpha - ۱, \alpha y + \alpha - ۱)$$
$$\beta * (x, y) = (\beta x + \beta - ۱, \beta y + \beta - ۱)$$

برطبق تعریف $\oplus$،

$$(\alpha * (x, y)) \oplus (\beta * (x, y))$$
$$= ((\alpha x + \alpha - ۱) + (\beta x + \beta - ۱) + ۱, (\alpha y + \alpha - ۱) + (\beta y + \beta - ۱) + ۱)$$

$$= ((\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)-۱, (\alpha+\beta)y+(\alpha+\beta)-۱)$$
$$= (\alpha+\beta)*(x, y).$$

$$\alpha*((x, y)\oplus(x', y')) = \alpha*(x+x'+۱, y+y'+۱) \qquad (\text{V}۶)$$
$$= (\alpha(x+x'+۱)+\alpha-۱, \alpha(y+y'+۱)+\alpha-۱)$$

درعین حال

$$\begin{aligned}
&\alpha*(x, y)\oplus\alpha*(x', y')\\
&= (\alpha x+\alpha-۱, \alpha y+\alpha-۱)\oplus(\alpha x'+\alpha-۱, \alpha y'+\alpha-۱)\\
&= (\alpha x+\alpha-۱+\alpha x'+\alpha-۱+۱, \alpha y+\alpha-۱+\alpha y'+\alpha-۱+۱)\\
&= \alpha*((x, y)\oplus(x', y'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha*(\beta*(x,y)) &= \alpha*(\beta x+\beta-۱, \beta y+\beta-۱) \qquad (\text{V}۷)\\
&= (\alpha\beta x+\alpha\beta-\alpha+\alpha-۱, \alpha\beta y+\alpha\beta-\alpha+\alpha-۱)\\
&= (\alpha\beta x+\alpha\beta-۱, \alpha\beta y+\alpha\beta-۱)\\
&= (\alpha\beta)*(x, y)
\end{aligned}$$

$$۱*(x, y) = (x+۱-۱, y+۱-۱) = (x, y) \qquad (\text{V}۸)$$

پس، گردآوردهٔ زوجهای مرتب اعداد حقیقی با عمل جمع $\oplus$، و ضرب اسکالر $*$ یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

تمرینات

۱. در زیر فهرستی از مجموعه‌ها با اعمال جمع، و ضرب اسکالری که روی آنها تعریف شده‌اند، ارائه می‌شود. در مورد هر مجموعه، نشان دهید که آن مجموعه، همراه اعمال تعریف شده روی آن، یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

(الف) مجموعهٔ ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

با اعمال

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$
$$\alpha\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{bmatrix}$$

(ب) مجموعهٔ ماتریسهای حقیقی به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

با اعمال جمع، وضرب اسکالر معمولی.

(ج) مجموعهٔ سه تایی‌های مرتب ازاعدادحقیقی (x, y, z)، به‌طوری‌که $z = x + y$، با

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

و
$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \cdot$$

(د) چند جمله‌ایهای زوج با درجهٔ نابیشتر از n، (n عددی است صحیح و مثبت)، وبا اعمال جمع، وضرب اسکالر معمولی چند جمله‌ایها.

(ه) چند جمله‌ایهای فرد با درجهٔ نابیشتر از n، (n عددی است صحیح و مثبت)، و با اعمال جمع، وضرب اسکالر معمولی چند جمله‌ایها.

(و) چند جمله‌ایهای f، با درجهٔ نابیشتر از n، به‌طوری که $f(1) = 0$، وبا اعمال جمع، وضرب اسکالر که به‌روش معمولی تعریف شده‌اند.

(ز) زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y) با

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 1, y + y')$$
$$\alpha * (x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y)$$

(ح) توابع مشتق پذیر روی فاصلهٔ $(0, 1)$ با

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \text{ ، } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

و جمع، وضرب اسکالر معمولی توابع.

۲. روی مجموعهٔ سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی (x, y, z)، جمع را با

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

وضرب اسکالر را با $\alpha(x, y, z) = (0, 0, 0)$ تعریف کنید. نشان دهید که همهٔ اصول فضای برداری، بجز (V۸)، برقرارند.

۳. روی مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y)، جمع را با

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{،}$$

و ضرب اسکالر را با $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$ تعریف کنید. نشان دهید که همهٔ اصول فضای برداری، بجز (V۵)، برقرارند.

۴. روی مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی، جمع را با

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{،}$$

وضرب اسکالر را با $\alpha(x, y) = (3\alpha x, 3\alpha y)$ تعریف کنید. نشان دهید که همهٔ اصول

فضای برداری، بجز (V۷) و (V۸)، برقرارند.

۵. فرض کنید X یک مجموعه باشد. $\mathcal{F}$، خانوادهٔ تمام توابع از X به اعداد حقیقی، را درنظر بگیرید. جمع، وضرب اسکالر را به صورت

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \text{ ، } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

تعریف کنید. نشان دهید که این خانوادهٔ مفروض از توابع با این اعمال، یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

۶. فرض کنید U یک فضای برداری مختلط باشد. با همان عمل جمع، ولی با ضرب اسکالر $\alpha\mathbf{x}$ برای $\mathbf{x}\in U$ وعدد حقیقی α. نشان دهید که U یک فضای برداری حقیقی است. (این تعریف معنی دارد، زیرا اعداد حقیقی درمجموعهٔ اعداد مختلط قرار دارند.)

۷. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری حقیقی باشد که جمع آن‌را با $+$ وضرب اسکالرش را با $\cdot$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\mathbf{t}$ بردار ثابتی در V باشد. جمع جدیدی روی V با $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{t}$ وضرب اسکالر جدیدی روی V با $\alpha * \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + (\alpha - ۱)\mathbf{t}$ تعریف کنید. نشان دهید که V بااعمال $\oplus$ و $*$ یک فضای برداری است.

۸. روی مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y)، جمع، $\oplus$، را با

$$(x, y) \oplus (x', y') = ((x^{۳} + (x')^{۳})^{۱/۳}, (y^{۳} + (y')^{۳})^{۱/۳})$$

وضرب اسکالر را با $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ تعریف کنید. نشان دهید که مجموعهٔ فوق با این اعمال یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

۲ خواص دیگری از فضاهای برداری

در مورد هرفضای برداری، می‌توانیم از اصول (V۱) – (V۸) جهت به‌دست آوردن قواعد دیگری برای عملیات جبری روی بردارها، استفاده کنیم.

قضیهٔ ۱ گیریم V یک فضای برداری و $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دوبردار در V باشند. در این صورت یک و فقط یک $\mathbf{u}$ متعلق به V وجود دارد، به طوری که $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{y}$.

اثبات ابتدا باید نشان دهیم که $\mathbf{u}$ای از این نوع وجود دارد. برای انجام این کار، گیریم $\mathbf{u} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{y}$. دراین صورت

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + \mathbf{u} &= \mathbf{x} + ((-\mathbf{x}) + \mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) + \mathbf{y} && [\text{بنا به } (V۲)] \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{y} && [\text{بنا به } (V۴)] \\
&= \mathbf{y} && [\text{بنا به } (V۳)]
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که فقط یک $\mathbf{u}$ از این نوع وجود دارد. فرض می‌کنیم $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ بردارهایی در V باشند، به نحوی که

$$\mathbf{x}+\mathbf{u}_1=\mathbf{y} \text{ و } \mathbf{x}+\mathbf{u}_2=\mathbf{y}$$

پس $\mathbf{x}+\mathbf{u}_2=\mathbf{x}+\mathbf{u}_1$. لذا

$$(-\mathbf{x})+(\mathbf{x}+\mathbf{u}_1)=(-\mathbf{x})+(\mathbf{x}+\mathbf{u}_2)$$

[بنا به $(V2)$] $$((-\mathbf{x})+\mathbf{x})+\mathbf{u}_1=((-\mathbf{x})+\mathbf{x})+\mathbf{u}_2$$

[بنا به $(V4)$] $$0+\mathbf{u}_1=0+\mathbf{u}_2$$

[بنا به $(V3)$] $$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2 \qquad \bullet$$

معمولاً بردار $\mathbf{y}+(-\mathbf{x})$ را که دربالا مورد بررسی قرار گرفت با $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ نشان می‌دهند. بردار $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ را بردار حاصل از کم کردن $\mathbf{x}$ از $\mathbf{y}$ می‌نامند.

به عنوان مثالی دیگر از نتایجی که از اصول فضای برداری می‌توان به دست آورد، قضیهٔ زیر را می‌آوریم.

قضیهٔ ۲ گیریم V یک فضای برداری، $\mathbf{x}$ برداری در V، و α یک اسکالر باشد. آنگاه

(۱) $\alpha\cdot 0=0$

(۲) $0\cdot\mathbf{x}=0$

(۳) $\alpha\mathbf{x}=0$ نتیجه می‌دهد که یا $\alpha=0$ و یا $\mathbf{x}=0$.

اثبات برای اثبات (۱)، بنا به $(V3)$، مشاهده می‌کنیم که

$$0+0=0$$

پس

$$\alpha(0+0)=\alpha\cdot 0$$

[بنا به $(V6)$] $$\alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0=\alpha\cdot 0$$

طبق قضیهٔ ۱، می‌دانیم که فقط یک بردار $\mathbf{u}$ وجود دارد چنانکه $\alpha\cdot 0+\mathbf{u}=\alpha\cdot 0$. بنا به $(V3)$، برداری ازاین نوع، صفر است. پس $\alpha\cdot 0=0$. به طریق دیگر با افزودن $\alpha\cdot 0-$ به طرفین تساوی $\alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0=\alpha\cdot 0$، خواهیم داشت

$$((\alpha\cdot 0)+(\alpha\cdot 0))+(-\alpha\cdot 0)=(\alpha\cdot 0)+(-\alpha\cdot 0)$$

[بنا به $(V4)$] $$=0$$

[بنا به $(V2)$] $$(\alpha\cdot 0)+(\alpha\cdot 0+(-\alpha\cdot 0))=0$$

[بنا به $(V4)$] $$(\alpha\cdot 0)+0=0$$

[بنا به $(V3)$] $$\alpha\cdot 0=0$$

برای اثبات (۲)، مشاهده می‌کنیم که $0\cdot\mathbf{x}=(0+0)\mathbf{x}$، زیرا $0+0=0$.

لـذا، طبق $(V5)$، $0 \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x}$. مانند قبل، بـا افـزودن $-0 \cdot \mathbf{x}$ به طرفین تساوی قبلی، خواهیم داشت $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

برای اثبات (۳)، فرض می‌کنیم که $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. اگر $\alpha \neq 0$، می‌توانیم طرفین ایـن تساوی را در α^{-1} ضربِ کنیم تا داشته باشیم:

$$\alpha^{-1}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \text{[بنا به (۱)]}$$
$$(\alpha^{-1}\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{[بنا به (V7)]}$$
$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{[بنا به (V8)]}$$

لذا، اگر $\alpha \neq 0$، داریم $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. بنابراین باید داشته باشیم $\alpha = 0$ و یا $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ●

قضیهٔ زیرمی‌گوید که مضرب اسکالر $(-1)\mathbf{x}$ از بردار $\mathbf{x}$ با قرینه‌اش $-\mathbf{x}$ مساوی است.

قضیهٔ ۳ اگر V یک فضای برداری و $\mathbf{x}$ برداری در V باشد، دراین صورت

$$(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}.$$

اثبات چون $0 = (-1) + 1$، داریم

$$(1 + (-1))\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{[بنا به (۲) ازقضیهٔ ۲]}$$

لذا، طبق $(V5)$،

$$(1)\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

یا با استفاده از $(V8)$،

$$\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

اگر $-\mathbf{x}$ را به طرفین این تساوی بیفزاییم، خواهیم داشت $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. ●

به طور کلی، اصول فضای برداری به ما امکان می‌دهد کـه اعمال جبری را تقریباً به همان طریقی کـه روی بردارهای ستونی انجام می‌دادیم، روی بردارهای مجرد نیز انجام دهیم. درنظر داشتن این مطلب، ضرورت مراجعه بـه اصول $(V1)$–$(V8)$ فضای برداری را ازمیان می‌برد.

تمرینات

۱. فرض‌کنید V یک فضای برداری باشد. فرض‌کنید $\mathbf{x}$ و $\mathbf{e}$ اعضایی از V باشند به‌طوری که $\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{x}$. نشان دهید که $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

۲. اگر V یک‌فضای برداری‌باشد. $\mathbf{x} \in V$، و α_1، α_2، ...، α_n اسکالرباشند، بااستفاده از

استقرا ثابت کنید که $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x} + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}$.

۳. اگر V یک فضای برداری، $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ متعلق به V، و α یک اسکالر باشد، با استفاده از استقرا نشان دهید که

$$\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha\mathbf{x}_n .$$

۴. اگر V یک فضای برداری حقیقی و $\mathbf{x}$ متعلق به V باشد و $\mathbf{x} + \mathbf{x} = 0$، نشان دهید که $\mathbf{x} = 0$.

۵. اگر V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\mathbf{y}_1$، و $\mathbf{y}_2$ متعلق به V باشند،

$$\begin{aligned} a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 &= \mathbf{y}_1 \\ c\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{y}_2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ را برحسب $\mathbf{y}_1$ و $\mathbf{y}_2$ بیابید.

۶. اگر V یک فضای برداری، $\mathbf{x}$ متعلق به V، و α و β دو اسکالر باشند، و اگر $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}$ و $\alpha \neq \beta$، نشان دهید که $\mathbf{x} = 0$.

۷. اگر V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\mathbf{x}_3$، $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، و $\mathbf{y}_3$ بردارهایی در V باشند، و

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 &= \mathbf{y}_1 \\ -2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 &= \mathbf{y}_2 \\ -\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 &= \mathbf{y}_3 \end{aligned}$$

نشان دهید که $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 = 0$.

۸. اگر V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$، $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، . . .، $\mathbf{y}_n$ متعلق به V باشند و

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= \mathbf{y}_n \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ را برحسب $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، . . .، $\mathbf{y}_n$ بیابید.

۹. فضایی برداری مانند V بیابید که دارای دو بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ باشد و هیچیک از این دو بردار، مضرب اسکالر دیگری نباشد.

۱۰. نشان دهید که هرمجموعهٔ V با اعمال جمع، وضرب اسکالری که در (V۲) - (V۸) صدق می‌کند، بـایـد در (V۱) نیز صدق کند. [راهنمایی: $(\mathbf{x} + \mathbf{y})(۱ + ۱)$ را به دو طریق با استفاده از (V۵) و (V۶) حساب کنید.]

۳ زیرفضاها

اگر V یک فضای برداری روی اعـداد حقیقی (یا اعداد مختلط) باشد، زیرمجموعه های معینی از V، به نام زیرفضا، وجود دارند کـه تحت همـان اعمال جبری، خـود نیز فضای برداری‌اند. هدف این بخش، مطالعهٔ چنین اشیایی است.

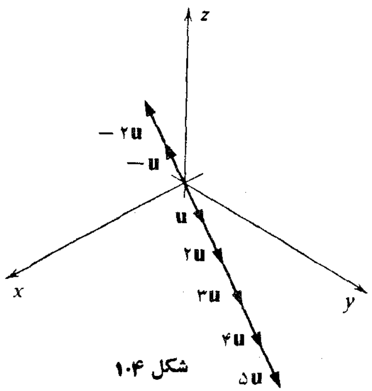
تعریف اگر V یک فضای برداری و H زیر مجموعه‌ای غیرتهی از V با خواص زیرباشد

(۱) هرگاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به H باشند، آنگاه $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ متعلق به H است.

(۲) اگر $\mathbf{x}$ متعلق به H و α یک اسکالر باشد، آنگاه $\alpha\mathbf{x}$ متعلق به H است. آنگاه H را یک **زیرفضای** فضای برداری V می‌نامند.

به عبارت‌دیگر، یک زیرفضای V زیر مجموعه‌ای است‌که تحت اعمال جبری جمع، وضرب اسکالر بسته باشد.

به عنوان مثال، گیریم L درفضای $\mathbf{R}^۳$ مجموعهٔ بردارهایی باشد که روی خطی که از مبدأ می‌گذرد، قرار دارند. (ر.ک.شکل ۱۰۴.) از روی بیان هندسی فرایند ضرب اسکالر، واضح است که همهٔ بردارهای L مضارب اسکالر یک‌بردار غیرصفر در L، مثلاً $\mathbf{u}$، هستند. اگـر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به L باشند، به ازای اسکالرهـای مناسب α و β، داریـم $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u}$ و $\mathbf{y} = \beta\mathbf{u}$. دراین‌صورت، $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha + \beta)\mathbf{u}$. لذا، $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ به‌عنوان مضرب‌اسکالری از $\mathbf{u}$، الزاماً بـایـد متعلق به L باشد. بعلاوه، چـون $\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{u}) = (\lambda\alpha)\mathbf{u}$، همچنین می‌بینیم که اگر $\mathbf{x}$ متعلق به L و λ یک اسکالر باشد، آنگاه $\lambda\mathbf{x}$ به L تعلق دارد. پس، بـا تحقیق‌برقراری شرایط (۱) و (۲) ازتعریف زیرفضا، می‌بینیم‌که L زیرفضایی از $\mathbf{R}^۳$ است.

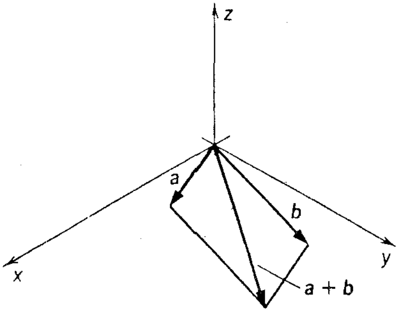


شکل ۱۰۴

به عنوان مثال دیگری از یک زیرفضای $\mathbf{R}^۳$، گیریم H مجموعهٔ آن بـردارهـایی از $\mathbf{R}^۳$ باشد که درصفحهٔ xy قرار دارند. به عبارت دیگر، H مرکب از بردارهایی به صورت

$\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$ است. اگر $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\0\end{bmatrix}$ دو بردار از این نوع باشند، آنگاه حاصلجمع آنها $\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\0\end{bmatrix}$ هم در H است. همچنین اگر $\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$ در H و α یک اسکالر باشد، آنگاه $\alpha\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x\\\alpha y\\0\end{bmatrix}$ و این بردار نیز در H می‌باشد. در نتیجه H زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$ است.

زیر فضا بودن H را می‌توان به‌طریق هندسی نیز تعبیر کرد. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار در صفحهٔ xy باشند، آنها را می‌توان به‌عنوان پاره خطهای جهت داری که از مبدأ شروع شده و در صفحهٔ xy واقع‌اند، در نظر گرفت. دراین صورت بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را می‌توان به عنوان قطر متوازی الاضلاعی که اضلاع مجاورش $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هستند به حساب آورد. واضح است که این بردار نیز درصفحهٔ xy قرار دارد. (ر.ک.شکل ۲.۴.) همین‌طور، مضارب اسکالر بردارهای صفحهٔ xy نیز درصفحهٔ xy واقع‌اند.



شکل ۲.۴

هرفضای برداری V دارای حداقل دو زیرفضاست. یکی به نام **زیرفضای صفر**، که فقط شامل بردار صفر است. واضح است که این مجموعه تحت اعمال جمع، و ضرب اسکالر بسته است. زیرفضای دیگر V، زیرفضای مرکب از تمام بردارهای V است. زیرفضایی که نه زیرفضای صفر است و نه تمام فضا، زیرفضای سره نامیده می‌شود.

اکنون احکامی رادربارهٔ زیرفضاها ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۱ اگر H زیرفضایی ازفضای برداری V باشد، $\mathbf{0}$ متعلق به H است.

اثبات گیریم $\mathbf{x}$ عنصری از H باشد. آنگاه، چون مضارب اسکالر بردارهای H متعلق به H هستند، $\mathbf{0}=0\mathbf{x}$ نیز متعلق به H است. ●

گزارهٔ ۲ اگر H زیرفضایی از فضای برداری V باشد، و $\mathbf{x}$ متعلق به H، آنگاه $-\mathbf{x}$ نیز

متعلق به H است.

اثبات اگر x متعلق به H باشد، چون H تحت ضرب‌اسکالر بسته‌است، $x = -x$ $(1-)$ به H تعلق دارد. ●

قضیه اگر H زیرفضایی ازفضای‌برداری V باشد،آنگاه H تحت‌اعمال‌جمع، وضرب‌اسکالر تعریف شده روی V، یک فضای برداری است.

دراین حالت، واقعاً چیز خیلی زیادی برای اثبات نداریم. H یک مجموعه است. جمع، وضرب اسکالر همان‌طور روی H تعریف شده‌اند که روی V. بنا به‌شرط (۱)، از تعریف زیرفضا، حاصلجمع دوعنصر H نیز عنصری از H است. برطبق (۲) مضرب اسکالر عنصری از H نیز در H است. لذا، H دارای یک قاعدهٔ جمع، و ضرب اسکالر است که عناصر H را به‌دست می‌دهند. اکنون بررسی این نکته باقی می‌ماند که $\bar{H}$ در اصول (V۱) ـ (V۸)، صدق می‌کند. (V۱) و (V۲) در H برقرارند، زیرا درV چنین است. بنا به‌گزارهٔ ۱، ۰ در H واقع است. درنتیجه (V۳) در H برقرار است. با استفاده از گزارهٔ ۲، نتیجه می‌شودکه (V۴) نیز درH درست‌است. H دارای خواص (V۵) ـ (V۸) است، زیرا V این خواص را دارد.

این قضیه به ما امکان می‌دهد که بدون تحقیق برقراری اصول (V۱) ـ (V۸) فضای برداری ــ‌که کار خسته کننده‌ای است‌ــ مثالهای جدید بسیاری بسازیم.

مثال ۱ گیریم L زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$ باشد، مرکب از آن بردارهایی که مؤلفهٔ اولشان صفر است. چون حاصلجمع دو بردار با مؤلفهٔ اول صفر، باز برداری است که مؤلفهٔ اولش صفر است، L تحت عمل جمع بسته است. همین‌طور یک مضرب اسکالر از برداری با مؤلفهٔ اول صفر، برداری است که مؤلفهٔ اول‌آن صفر است. لذا مضارب اسکالر بردارهای L نیز در L هستند. بنابراین، L یک زیرفضاست.

بنا به قضیهٔ فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم که n تایی‌های مرتب متعلق به L، یک‌فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهند.

مثال ۲ گیریم A ماتریس ثابت $m \times n$ای با درایه‌های حقیقی باشد و

$$N = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0, \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n\}.$$

ادعا می‌کنیم‌که N زیرفضایی از$\mathbf{R}^n$ است.

ابتدا، فرض می‌کنیم که $\mathbf{x}_1\in N$ و $\mathbf{x}_2\in N$؛ آنگاه

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذا، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in N$. حال اگر $\mathbf{x} \in N$ و α یک اسکالر باشد،

$$\begin{aligned} A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) \\ &= \alpha 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس، $\alpha\mathbf{x} \in N$.

با تحقیق برقراری شرایط (۱) و (۲) از تعریف زیرفضا، می‌بینیم که N زیرفضایی از $\mathbf{R}^n$ است. قضیهٔ قبلی تضمین می‌کند که با تعریف مناسب جمع، وضرب اسکالر، N به نوبهٔ خود یک فضای برداری است.

فرمولبندی ملموستری از مثال ۲ را می‌توان با بررسی جوابهای دستگاه معادلات همگن

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

به دست آورد. اگر

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

دوجواب ازاین نوع باشند، حاصلجمع آنها را با

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \\ x_4 + x_4' \end{bmatrix}$$

و حاصلضرب اسکالر را با

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{bmatrix}$$

تعریف می‌کنیم.

با تبدیل دستگاه معادلات به نماد ماتریسی و به‌کار بردن مثال ۲، می‌بینیم که مجموعهٔ جوابهای دستگاه معادلات همراه با جمع، و ضرب اسکالر فوق، یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد. البته، می‌توان با بررسی مشروح اصول (V۱)–(V۸) فضای برداری به همین نتیجه رسید.

مثال ۳ در فضای P_n، یعنی مجموعهٔ چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از n و با ضرایب حقیقی، زیر مجموعهٔ

$$H = \left\{ f \,\middle|\, \int_0^1 f(x)dx = 0 \text{ و } f \in P_n \right\}$$

یک زیر فضاست. ابتدا فرض می‌کنیم $f \in H$ و $g \in H$، آنگاه

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x) + g(x))\, dx &= \int_0^1 f(x)\, dx + \int_0^1 g(x)\, dx \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

بنابراین $f + g \in H$. حال فرض می‌کنیم $f \in H$ و α یک اسکالر باشد، دراین صورت

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\alpha f(x))\, dx &= \alpha \int_0^1 f(x)\, dx \\ &= \alpha \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

پس، $\alpha f \in H$.

با تحقیق برقراری شرایط (۱) و (۲) از تعریف زیرفضا، نتیجه می‌گیریم که H زیرفضایی از P_n است. سپس ازقضیهٔ فوق چنین برمی‌آید که H، با تعاریف مناسب جمع، وضرب اسکالر، خود یک فضای برداری است.

حال که چند مثال ازآن زیرمجموعه‌های فضای برداری که زیرفضا هستند را دیده‌ایم، بررسی چند زیرمجموعه از $\mathbf{R}^2$ که زیرفضا نیستند می‌تواند مفید باشد.

مثال ۴ در $\mathbf{R}^2$، گیریم

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \,\middle|\, \alpha \geqslant 0 \text{ و } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

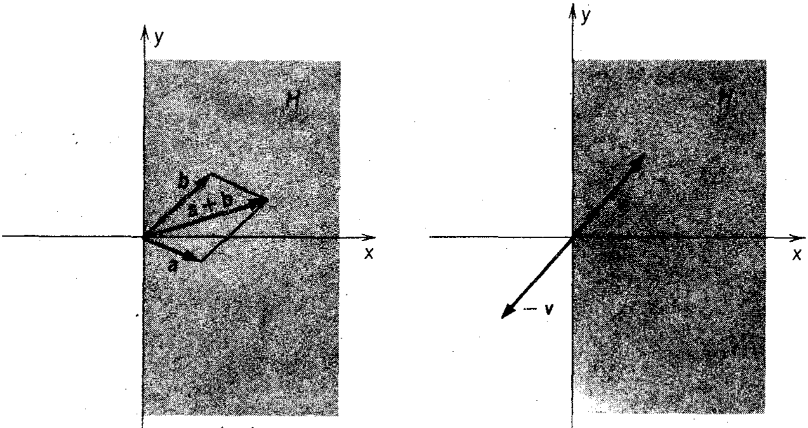
این مجموعه از لحاظ هندسی متناظر است با نیمصفحهٔ سمت راست. (ر.ک.شکل ۳.۴ (الف).) اگر $\mathbf{x}_1 \in H$ و $\mathbf{x}_2 \in H$، آنگاه

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

که درآن $\alpha_1 \geqslant 0$ و $\alpha_2 \geqslant 0$.

پس

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix}$$



(ب) (الف)

شکل ۳.۴

که درآن $\alpha_۱ + \alpha_۲ \geqslant ۰$، ولذا $\mathbf{x}_۱ + \mathbf{x}_۲ \in H$. از اینرو H تحت عمل جمع بسته است. لکن، چون

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \in H$$

$$(-۱)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

در H نیست، مضارب‌اسکالر بردارهای واقع‌در H، در H نیستند. (ر.ک.شکل ۳.۴ (ب).) درنتیجه، H زیرفضایی از $\mathbf{R}^۲$ نیست. دراین حالت، نکتهٔ جالب توجه آن است که اگر $\mathbf{x} \in H$ و $\alpha \geqslant ۰$، $\alpha\mathbf{x}$ نیز متعلق به H است.

مثال ۵ در $\mathbf{R}^۲$، گیریم

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \middle| \beta = ۰ \text{ یا } \alpha = ۰ \text{ و } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^۲ \right\}$$

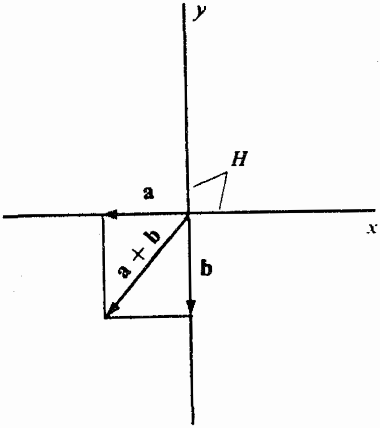
این مجموعه، از نظر هندسی، مرکب از همهٔ نقاط روی دو محور مختصات است. (ر.ک.شکل ۴.۴.) مضارب‌اسکالر بردارهای H نیز در H هستند، ولی H تحت عمل‌جمع بسته نیست. زیرا داریم

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \in H \text{ و } \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \in H$$

ولی

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

متعلق به H نیست.



شکل ۴.۴

تمرینات

۱. کدامیک از زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}^۲$ که در زیر آمده‌اند، زیرفضا هستند؟

(الف) $\{(x, y) \mid x = ۳y\}$ (ب) $\{(x, y) \mid x^۲ = y^۲\}$

(ج) $\{(x, y) \mid x + y = ۱\}$ (د) $\{(x, y) \mid x = y^۳\}$

(ه) $\{(x, y) \mid y = ۰\}$ (و) $\{(x, y) \mid x \geqslant ۰, y \geqslant ۰\}$

(ز) $\{(x, y) \mid x = y\}$

۲. کدامیک از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^۳$ که در زیرآمده‌اند، زیرفضا هستند؟

(الف) $\{(x, y, z) \mid y + z = ۰ \text{ و } x + ۳y = ۰\}$

(ب) $\{(x, y, z) \mid y = ۰ \text{ یا } x = ۰\}$

(ج) $\{(x, y, z) \mid x + y + z = ۰\}$

(د) $\{(x, y, z) \mid z \geqslant ۰ \text{ و } y \geqslant ۰ \text{ و } x \geqslant ۰\}$

(ه) $\{(x, y, z) \mid x^۲ + y^۲ \leqslant ۱\}$

(و) $\{(x, y, z) \mid z = ۲x + ۲y\}$

(ز) $\{(x, y, z) \mid x^۲ + y^۲ \leqslant ۱ \text{ و } z = ۰\}$

۳. فرض کنید H_i، زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$، مرکب از بردارهایی باشد که مؤلفهٔ iام آنها صفر است. نشان دهید که H_i زیرفضایی از $\mathbf{R}^n$ است.

۴. فرض کنید P_n مجموعهٔ چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از n باشد. فرض کنید H_e گردآوردهٔ چند جمله‌ایهای زوج P_n و H_o گردآوردهٔ چندجمله‌ایهای فرد P_n باشد. نشان دهید که H_e و H_o زیر فضاهایی از P_n هستند.

۵. در موارد زیر نشان دهید که زیر مجموعه های داده شده از فضای ماتریسهای ۲ × ۲،

M_{22}، زیرفضا هستند.

(الف) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$، که درآن a و b اعداد حقیقی‌اند.

(ب) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$، که درآن a و b اعداد حقیقی‌اند.

(ج) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$، که درآن a، b، و c اعداد حقیقی‌اند.

(د) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$، که درآن a، b، و c اعداد حقیقی‌اند.

(هـ) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$، که درآن a و b اعداد حقیقی‌اند.

(و) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix}$، که درآن a، b، و c اعداد حقیقی‌اند.

(ز) همهٔ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$، که درآن a و b اعداد حقیقی‌اند.

۶. فرض کنید P نشانگر گردآوردهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب حقیقی باشد.
(الف) نشان دهید که P یک فضای برداری روی اعداد حقیقی است.
(ب) نشان دهید که زیر مجموعه‌هایی از P که در زیرآمده‌اند، زیرفضا هستند.

(۱) $\{f \mid$ (درجهٔ f) $\leqslant n$، n عدد صحیح مثبت ثابتی است$\}$
(۲) $\{f \mid f(\alpha) = 0$ و α عدد ثابتی است$\}$
(۳) $\{f \mid f(\alpha) = f(\beta)$، که درآن α و β اعداد ثابتی هستند$\}$
(۴) $\{f \mid f'(\alpha) = 0$، که درآن α عدد ثابتی است$\}$
(۵) $\{f \mid f$ بر $(x-1)$ قابل قسمت است$\}$
(۶) $\{f \mid f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$
(۷) $\{f \mid f(0) - \int_0^1 f(x)dx = 0\}$

۷. در فضای ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های حقیقی، $A = [a_{ij}]_{(nn)}$، گوییم که ماتریس، بالا مثلثی است اگر $a_{ij} = 0$ برای $j < i$. نشان دهیدکه ماتریسهای بالا مثلثی زیرفضایی ازفضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل می‌دهند.

۸. نشان دهید که ماتریسهای متقارن، زیر فضایی از فضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل می‌دهند. آیا ماتریسهای هرمیتی زیرفضایی ازفضای‌ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های مختلط تشکیل می‌دهند؟

۹. نشان دهیدکه ماتریسهای قطری، زیرفضایی ازفضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل می‌دهند.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی باشد و H زیر مجموعه‌ای از

V. نشان دهید که (الف)، (ب)، و (ج) هم‌ارزند.
(الف) H یک زیر فضاست.
(ب) اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$، آنگاه $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.
اگر $\mathbf{x} \in H$، آنگاه $-\mathbf{x} \in H$.
اگر $\mathbf{x} \in H$ و $\alpha \geqslant 0$ یک اسکالر حقیقی باشد، آنگاه $\alpha\mathbf{x} \in H$.
(ج) اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ و β یک اسکالر باشد، آنگاه $\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in H$.

۱۱. فرض‌کنید M_{nn} نشانگر فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. دراین فضا
(الف) نشان دهید که مجموعهٔ ماتریسهای وارون پذیر $n \times n$، زیر فضایی از M_{nn} نیست.
(ب) نشان دهید که مجموعهٔ ماتریسهای وارون ناپذیر $n \times n$، تحت ضرب اسکالر بسته است؛ یعنی، مضرب اسکالرهرماتریس وارون ناپذیر، وارون‌ناپذیر است. ولی این مجموعه، زیرفضایی از M_{nn} نیست.

۱۲. فرض کنید B یک ماتریس ثابت در M_{nn} باشد. نشان دهید که زیر مجموعه های M_{nn}، مذکور در زیر، زیرفضا هستند.

(الف) $\{A \mid AB = BA \text{ و } A \in M_{nn}\}$
(ب) $\{A \mid AB + BA = 0 \text{ و } A \in M_{nn}\}$
(ج) $\{A \mid AB = 0 \text{ و } A \in M_{nn}\}$
(د) $\{A \mid BA = 0 \text{ و } A \in M_{nn}\}$

مثالهایی ارائه دهیدکه نشان دهد، (ج) و (د) الزاماً معرف زیرفضاهای‌یکسان نیستند.

۱۳. فرض کنید a_1، a_2، . . .، a_n اعداد حقیقی باشند. نشان دهید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

در $\mathbf{R}^n$، به‌طوری که $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$، زیر فضایی از $\mathbf{R}^n$ تشکیل می‌دهند. چرا این یک حالت خاص از مثال ۲ درمتن است؟

۱۴. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و H و K زیرفضاهایی از V. نشان دهید که مجموعهٔ $H \cap K = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K \text{ و } \mathbf{x} \in H\}$ زیرفضایی از V است.

۱۵. فرض کنید V یک فضای برداری و H و K دو زیرفضای V باشند. نشان دهید که مجموعهٔ $H + K = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{h} + \mathbf{k}$، که درآن $\mathbf{h} \in H$ و $\mathbf{k} \in K\}$ زیرفضایی از V است.

۱۶. اگر H زیر فضایی از فضای برداری V باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ متعلق به V و بعلاوه α_1، α_2، . . .، α_n اسکالر باشند، با استفاده از استقرا ثابت کنید که

$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ متعلق به H است.

۴ پدید آوردن

گیریم V یک‌فضای برداری باشد، $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ بردارهایی در V، و α_1، α_2، . . .، α_n اسکالرباشند. اگر بردار $\mathbf{y}$ در V را بتوان به صورت $\mathbf{y}=\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{x}_n$ نوشت، آنگاه $\mathbf{y}$ را یک **ترکیب خطی** $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ گویند. مثلاً در P_2، مجموعهٔ چندجمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از ۲، هرعنصر را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از ۱، x، و x^2 نوشت. زیرا داریم، $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. در $\mathbf{R}^3$، اگر انتهای بردار $\mathbf{v}$ نقطهٔ (x, y, z) باشد، داریم $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ولذا $\mathbf{v}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ است.

زیرفضاها را می‌توان با استفاده از مفهوم ترکیب خطی به صورت زیر مشخص کرد: زیرمجموعهٔ H ازفضای برداری V، زیر فضاست اگــر وفقط اگر، وقتی $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ متعلق به H باشند، هرترکیب خطی از $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ نیز متعلق به H باشد.

برای تولید زیرفضاهای یک فضای بـرداری V، روشی طبیعی، مبتنی بـراستفاده از ترکیبات‌خطی، وجود دارد. اگر S زیرمجموعه‌ای ازفضای برداری V باشد، **مجموعهٔ پدید آمده توسط** S، که آن را با $\mathrm{sp}(S)$ نشان می‌دهیم، برحسب تعریف، مجموعهٔ بردارهایی است که هرکدام ازآنها را بتوان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای S نوشت.

برای مثال، در $\mathbf{R}^3$، مجموعهٔ پدید آمده توسط

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

مرکب ازتمام بردارهای به‌صورت

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{bmatrix}$$

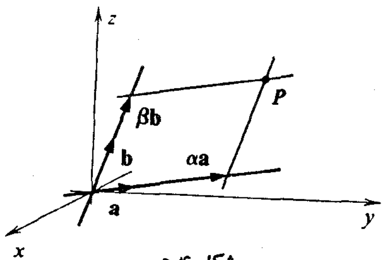
است. در این حالت، مجموعهٔ پدید آمده، دقیقاً آن زیرمجموعه از $\mathbf{R}^3$ است که مؤلفهٔ سوم بردارهای عضو آن، صفر است. اگر مجموعهٔ پدیدآمده توسط

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

را در نظر بگیریم، درمی‌یابیم کــه این مجموعه، دقیقاً عبارت است از همین گردآورده از بردارها. درواقع، مؤلفهٔ سوم هرترکیب خطی از سه بردار فوق، صفر است. از طرف دیگر، واضح است که هربردار را کــه مؤلفهٔ سومش صفر باشد، می‌توان به صورت ترکیبی خطی از دوبردار اولی مجموعهٔ فوق، ولذا الزاماً، به‌صورت ترکیبی خطی از هرسه بـردار این مجموعه نوشت.

برای روشن کردن معنی هندسی پدیدآوردن، مجموعهٔ پدید آمده توسط دوبردار ناهمخط $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در $\mathbf{R}^3$ را مشخص می‌کنیم. نشان خواهیم داد که مجموعهٔ پدیدآمده توسط $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، متشکل از بردارهای واقع در صفحه‌ای است که ازمبدأ می‌گذرد وبا بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معین می‌گردد. (ر. ک. شکل ۵.۴.)

برای شروع کار متذکر می‌شویم که، برطبق معنی هندسی جمع، و ضرب اسکالر بردارها، هرترکیب خطی از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باید درصفحه‌ای واقع باشد که توسط $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معین می‌شود. زیرا، کافی است توجه کنیم که بردار $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ چیست. واضح است که $\alpha\mathbf{a}$ و $\beta\mathbf{b}$ (که هریک روی خطی قرار دارد که ازمبدأ می‌گذرد وبترتیب توسط $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معین می‌گردد.) هردو، درصفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد وبا بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معین می‌گردد، واقع‌اند. چون $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ در صفحه‌ای قرار دارد که $\alpha\mathbf{a}$ و $\beta\mathbf{b}$ هر دو درآن واقع‌اند، $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ در صفحه‌ای واقع است که با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معین می‌شود.



شکل ۵.۴

ازطرف دیگر، گیریم P نقطه‌ای درصفحهٔ معین شده توسط بردارهای ناهمخط $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد. در این صفحه، خط l_a را طوری رسم می‌کنیم که از نقطهٔ P به‌موازات پاره‌خط جهت‌دار وابسته به بردار $\mathbf{a}$ بگذرد. چون $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ناهمخط هستند، l_a موازی خط تولید شده توسط $\mathbf{b}$ نیست و بنابراین آن را درنقطه‌ای، مثلاً در انتهای بردار $\beta\mathbf{b}$، قطع می‌کند. همین‌طور، اگر خط l_b را طوری رسم کنیم که ازنقطهٔ P به‌موازات بردار $\mathbf{b}$ بگذرد، می بینیم که خط تولید شده توسط بردار $\mathbf{a}$ را در نقطهٔ انتهایی برداری مانند $\alpha\mathbf{a}$ قطع می‌کند. برطبق این نحوهٔ ترسیم، P الزاماً انتهای قطر یک متوازی الاضلاع است که اضلاع مجاورش با بردارهای $\alpha\mathbf{a}$ و $\beta\mathbf{b}$ معرفی می‌شوند. ازاینرو، اگر $\mathbf{v}$ برداری باشد که نقطهٔ انتهایی آن P است، آنگاه $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. بنابراین، هربردار واقع درصفحهٔ معین شده توسط $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، ترکیبی خطی از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

شاید، به تشابه بین این روش و روش پیدا کردن مختصات دکارتی در صفحه، توجه کرده باشید. از مثالهای قبلی، خاصیت مهمی از $\mathrm{sp}(S)$ را به دست می‌آوریم.

قضیه اگر V یک فضای‌برداری باشد و S زیرمجموعه‌ای از V، آنگاه $\mathrm{sp}(S)$ زیرفضایی از V است.

اثبات فرض می‌کنیم $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به $\mathrm{sp}(S)$ باشند. دراین صورت

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$
$$\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \beta_m\mathbf{y}_m$$

که در آن α_1، α_2، . . .، α_n و β_1، β_2، . . .، β_m اسکالرند و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ و $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، . . .، $\mathbf{y}_m$ بردارهایی در S می‌باشند. پس

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n + \beta_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \beta_m\mathbf{y}_m$$

لذا، $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ترکیبی خطی از بردارهای S است وبنابراین $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ متعلق به $\mathrm{sp}(S)$ است. به‌علاوه، اگر α یک اسکالر باشد، داریم

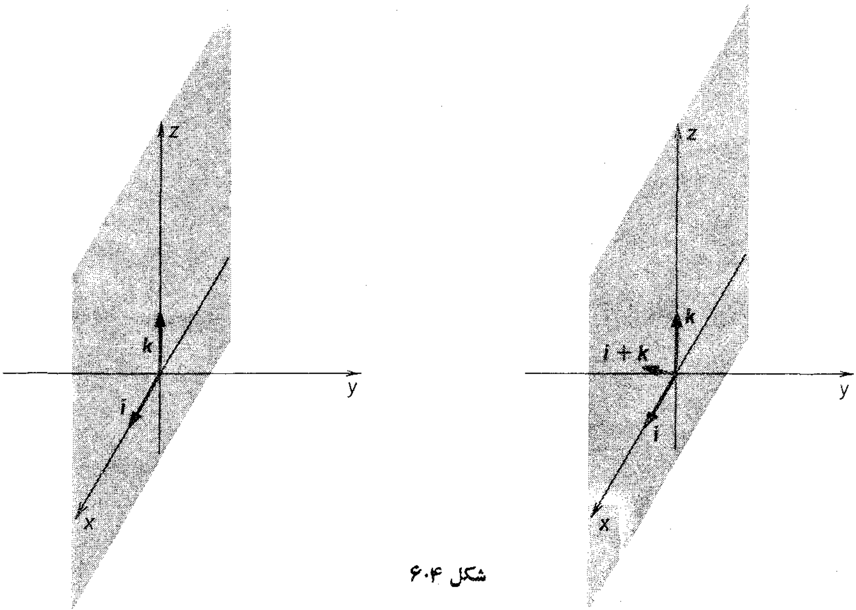
$$\alpha\mathbf{x} = \alpha(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = (\alpha\alpha_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{x}_n$$

پس $\alpha\mathbf{x}$، به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای S، الزاماً متعلق به $\mathrm{sp}(S)$ می‌باشد. ●

اگر این قضیه را برای‌مثال قبلی به‌کار بریم، می‌بینیم که مجموعهٔ بردارهای واقع در صفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد، زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$ می‌سازد.

به عنوان مثالی دیگر، گیریم P نشانگر فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x و با ضرایب حقیقی باشد. فضای پدید آمده توسط چند جمله‌ایهای ۱، x، x^2، . . .، x^n در P دقیقاً P_n است، یعنی مجموعهٔ چند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از n، که البته زیر فضایی از P است.

اگر H زیرفضایی از فضای برداری V باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ گردآورده‌ای از بردارهای V، به‌طوری که $H = \mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$، می‌گوییم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$



شکل ۶.۴

فضای H را پدید می‌آورند. به عبارت دیگر، ترکیبات خطی بردارهای $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$، زیرفضای H را پر می‌کنند.

تذکر این نکته مهم است که یک گردآوردهٔ مفروض S از بردارها، که زیرفضای H از فضای برداری V را پدید می‌آورد، ممکن است زوائدی داشته باشد، بدین مفهوم که ممکن است اعضاء بخصوصی از S را بتوان حذف کرد و زیرمجموعه‌ای به دست آورد که همان فضا را پدید آورد. مثلاً، مجموعهٔ بردارهای $\{\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{k}\}$ در $\mathbf{R}^۳$ را در نظر می‌گیریم (ر. ک. شکل ۶.۴.) این بردارها صفحهٔ xz در $\mathbf{R}^۳$ را پدید می‌آورند. لکن، اگر هرعضوی از این مجموعه را حذف کنیم، یک جفت بردار ناهمخط در همین صفحه به دست می‌آوریم. بنا به مثال قبلی، این دوبردار نیز صفحهٔ xz را پدید می‌آورند.

دربخش بعدی شرطی را روی مجموعه‌ای ازبردارهای $\{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ بررسی می‌کنیم که درصورت برقراری آن، این تکرارها مطمئناً پیش نخواهدآمد.

تمرینات

۱. نشان دهید که هریک از مجموعه‌های بردارهای زیر، فضایی برداری را که مقابل آن نوشته شده، پدید می‌آورد.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{R}^۳$

(ب) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{R}^۳$

(ج) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{R}^۲$

(د) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$؛ $\mathbf{R}^۲$

(ه) ۱، x، $x^۲$؛ $P_۲$

(و) ۱، $(۱+x)$، $(۱+x)^۲$؛ $P_۲$

(ز) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$؛ فضای ماتریسهای متقارن ۲ × ۲.

(ح) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$؛ فضای ماتریسهای متقارن کج.

(ط) $۱+x$، $۱+۲x$، $۱+x^۲$، $۱+۲x^۲$؛ $P_۲$

(ی) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$؛ فضای ماتریسهای قطری ۳ × ۳.

۲. برای هریک ازصفحات زیر در $\mathbf{R}^3$، دوبردار بیابید که آن را پدید آورند.

(الف) صفحهٔ $x = 0$.

(ب) صفحهٔ $x = y$.

(ج) صفحهٔ $y = z$.

۳. n بردار بیابید که $\mathbf{R}^n$ را پدید آورند.

۴. چهار عنصر بیابید که فضای ماتریسهای ۲ × ۲ را پدید آورند.

۵. فرض‌کنید $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مجموعه‌ای از بردارها درفضای برداری V باشد. اگر $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ متعلق به $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ باشندو $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ فضای V را پدید آورند، نشان دهید که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ نیز فضای V را پدید می‌آورد.

۶. فرض کنید V یک فضای برداری و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ بردارهایی در V باشند. نشان دهید که $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ کوچکترین زیرفضای V است که شامل $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر، اگر H زیرفضایی از V شامل $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ باشد، نشان دهیدکه H شامل $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ نیزهست.

۷. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\mathbf{y}_1$، و $\mathbf{y}_2$ بردارهایی در V. اگر

$$\mathbf{x}_2 = \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 \quad \text{و} \quad \mathbf{x}_1 = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$$

که در آن

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

نشان دهید که $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathrm{sp}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$.

۸. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای برداری Vباشندو $A \subset B$، نشان دهید که $\mathrm{sp}(A) \subset \mathrm{sp}(B)$.

۹. اگر $\mathbf{y}$ متعلق‌به $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z})$ باشد ولی به $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ تعلق نداشته باشد، نشان دهید که $\mathbf{z}$ متعلق است به $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$.

۱۰. نشان دهید که

$$\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}) = \mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

اگر وفقط اگر $\mathbf{y}$ ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ باشد.

۱۱. نشان دهید کـه ماتریسهای وارون پذیر ۲ × ۲، فضای ماتریسهای ۲ × ۲ را پدید می‌آورند. نشان دهید که ماتریسهای وارون‌ناپذیر ۲ × ۲ فضای ماتریسهای ۲ × ۲ راپدید می‌آورند.

۱۲. نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فضای ماتریسهای 2×2 را پدید نمی‌آورند.

۱۳. نشان دهید که فضای برداری P ازهمهٔ چند جمله‌ایها، نمی‌تواند توسط تعدادی متناهی از عناصرش پدید آید.

۱۴. نشان دهید که ماتریسهای به صورت $AB - BA$، فضای ماتریسهای $n \times n$ را پدید نمی‌آورند.

۱۵. آیا ممکن است که فضای ماتریسهای $n \times n$ با استفاده از توانهای یک ماتریس A، یعنی با I_n، A، A^2، . . .، A^n . . . پدید آید؟

۵ استقلال خطی

مفهوم استقلال خطی ارتباط نزدیکی با مفهوم «پدید آوردن»، که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفت، دارد.

گردآوردهٔ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ از بردارهای یک فضای برداری را **مستقل خطی** گوییم اگر

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0,$$

ایجاب کند $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. به عبارت دیگر، اگر تنها ترکیب خطی از $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ که مساوی صفر است، ترکیب زیر باشد:

$$0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots 0 \cdot \mathbf{x}_n = 0.$$

برای مثال، در $\mathbf{R}^2$، بردارهای

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند. زیرا اگر فرض کنیم

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولذا $\alpha = 0$ و $\beta = 0$. بنابراین، نشان داده‌ایم که اگر

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه $\alpha = \beta = 0$. پس، بردارهای

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند.

به عنوان مثالی دیگر، در $P_۲$، مجموعهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب حقیقی و با درجهٔ نابیشتر از ۲؛ بردارهای ۱، $(x + ۱)$، و $(x+۱)^۲$ مستقل خطی‌اند. زیرا اگر فرض‌کنیم

$$\alpha \cdot ۱ + \beta(۱ + x) + \gamma(۱ + x)^۲ = ۰$$

آنگاه

$$\alpha \cdot ۱ + \beta \cdot ۱ + \beta x + \gamma \cdot ۱ + ۲\gamma x + \gamma x^۲ = ۰$$

یا

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + ۲\gamma) x + \gamma x^۲ = ۰$$

چون یک چند جمله‌ای فقط وقتی صفر است که همهٔ ضرایبش صفر باشد، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= ۰ \\ \beta + ۲\gamma &= ۰ \\ \gamma &= ۰ \end{aligned}$$

از اینجا بلافاصله حاصل می‌شود که $\alpha = \beta = \gamma = ۰$. حال که نشان داده‌ایم رابطهٔ $\alpha \cdot ۱ + \beta(۱ + x) + \gamma(۱ + x)^۲ = ۰$ مستلزم $\alpha = \beta = \gamma = ۰$ می‌باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\{۱, (x+۱)$ و $(x+۱)^۲\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از بردارهاست.

اگر مجموعه‌ای از بردارها مستقل خطی نباشد، گوییم که آن مجموعه **وابستهٔ خطی** است. لذا اگر $\{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک‌مجموعهٔ وابستهٔ خطی از بردارها باشد، اسکالرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، a_n که لااقل یکی از آنها صفر نیست وجود دارند به طوری که

$$\alpha_۱\mathbf{x}_۱ + \alpha_۲\mathbf{x}_۲ + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = ۰.$$

پس، در $\mathbf{R}^۲$، بردارهای

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

وابستهٔ خطی‌اند، زیرا داریم

$$(۱)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} + (-۱)\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

به عنوان مثالی دیگر، در $\mathbf{R}^۳$، بردارهای

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ ۷ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۶ \\ -۶ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

وابستهٔ خطی‌اند، زیرا که

$$(-2)\begin{bmatrix}1\\-3\\7\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+(+1)\begin{bmatrix}6\\-6\\16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

قضیهٔ زیر ارتباط بین پدیدآوردن و استقلال خطی را آشکار می‌سازد.

قضیه گیریم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ گردآورده‌ای از بردارهای یک‌فضای برداری V باشد. در این صورت $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک مجموعهٔ وابستهٔ خطی از بردارهاست اگر و فقط اگر یکی ازاین بردارها ترکیبی خطی ازبقیهٔ بردارهای این مجموعه باشد.

اثبات فرض می‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ وابستهٔ خطی باشد. پس

$$\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{x}_n=0,$$

که درآن لااقل یکی از اسکالرهای α_1، α_2، . . .، α_n صفر نیست. فرض می‌کنیم $\alpha_i \neq 0$. در این صورت

$$\alpha_i\mathbf{x}_i=(-\alpha_1)\mathbf{x}_1+\cdots+(-\alpha_{i-1})\mathbf{x}_{i-1}+(-\alpha_{i+1})\mathbf{x}_{i+1}+\cdots+(-\alpha_n)\mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{x}_i=(-\alpha_i^{-1}\alpha_1)\mathbf{x}_1+\cdots+(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1})\mathbf{x}_{i-1}+(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1})\mathbf{x}_{i+1}+\cdots+(-\alpha_i^{-1}\alpha_n)\mathbf{x}_n$$

بنابراین، $\mathbf{x}_i$ ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_{i-1}$، $\mathbf{x}_{i+1}$، . . .، $\mathbf{x}_n$ است.

از طرف دیگر، فرض می‌کنیم یکی از بردارها، مثلاً $\mathbf{x}_i$، ترکیبی خطی از $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ باشد. پس

$$\mathbf{x}_i=\beta_1\mathbf{x}_1+\cdots+\beta_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}+\beta_{i+1}\mathbf{x}_{i+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{x}_n$$

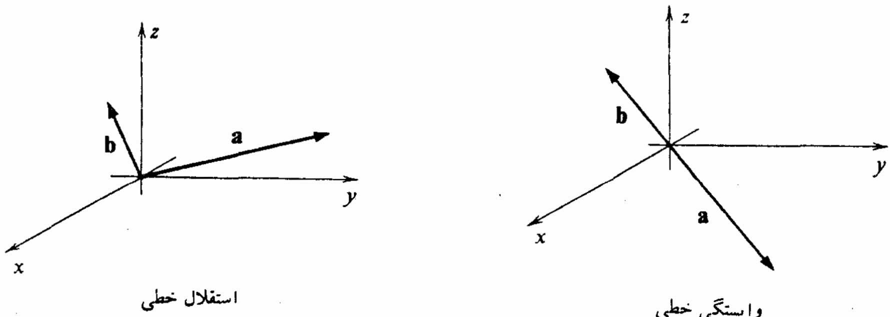
یا

$$\beta_1\mathbf{x}_1+\cdots+\beta_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}+(-1)\mathbf{x}_i+\beta_{i+1}\mathbf{x}_{i+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{x}_n=0$$

چون ضریب $\mathbf{x}_i$، یعنی ۱ ــ، مخالف صفر است، بردارهای $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ وابستهٔ خطی‌اند. ●

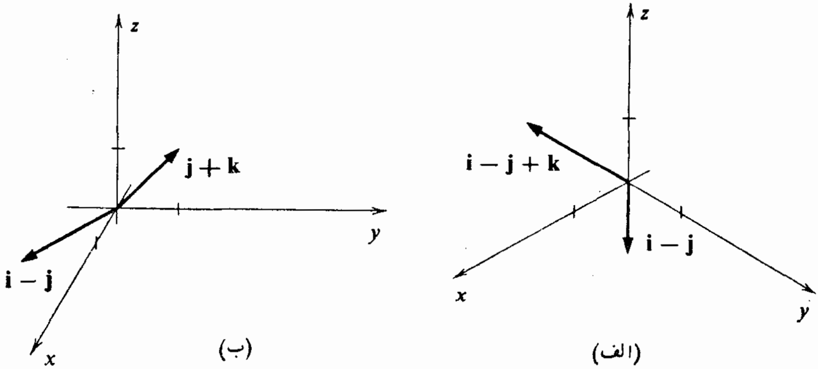
برای‌مثال، در P_2، چند جمله‌ایهای ۱، $x + 1$، $(x+1)^2$، و x^2 وابستهٔ خطی‌اند، زیرا $(1+x)^2 = 1\times x^2 + 2\times(1+x) + (-1)\times 1$.

اکنون معنی هندسی استقلال خطی را بررسی می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم **a** و **b** دوبردار وابستهٔ خطی در $\mathbf{R}^3$ باشند. بنا به قضیهٔ اخیر، یکی مضرب اسکالر دیگری است. لذا، **a** و **b** هردو روی خطی که از مبدأ می‌گذرد قرار دارند. از طرف دیگر، اگر **a** و **b** هردو روی خطی که از مبدأ می‌گذرد واقع باشند، یکی مضرب اسکالر دیگری است. در نتیجه، برطبق قضیهٔ اخیر، **a** و **b** وابستهٔ خطی‌اند. بنابراین، **a** و **b** مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر ناهمخط باشند. (ر. ک. شکل ۷.۴.)



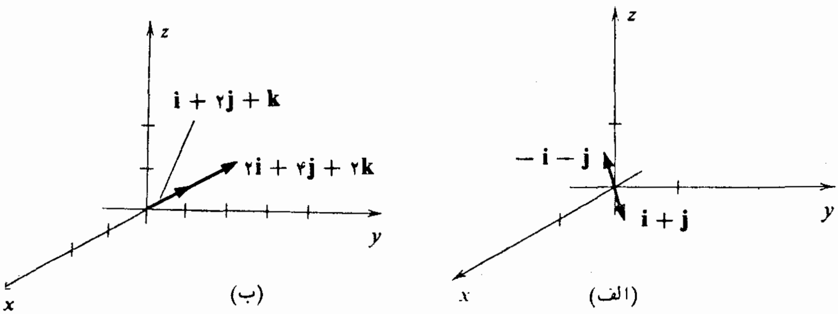
شکل ۷.۴

پس، برای مثال، دو بردار {$\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$} و {$\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{i}-\mathbf{j}$} مستقل خطی‌اند. (ر. ک. شکل ۸.۴.). از طرف دیگر، دو بردار {$\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$} و {$2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$} وابستهٔ خطی‌اند. (ر. ک. شکل ۹.۴.)



(ب) (الف)

شکل ۸.۴

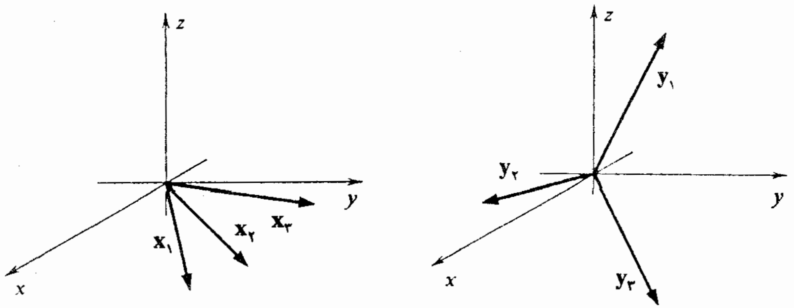


(ب) (الف)

شکل ۹.۴

برای تشخیص اینکه آیا مجموعه‌ای از سه بردار در $\mathbf{R}^3$ وابستهٔ خطی است یا نه، محکی هندسی نیز وجود دارد: مجموعه‌ای از سه بردار $\mathbf{R}^3$ وابستهٔ خطی است اگر و فقط اگر همگی آنها در صفحه‌ای که از مبدأ می‌گذرد واقع باشند. این را به صورت زیر ثابت می‌کنیم:

فرض می‌کنیم سه بردار $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ در $\mathbf{R}^3$ وابستهٔ خطی باشند. (ر. ک. شکل ۱۰.۴.) باید نشان دهیم که همگی آنها دریک صفحه واقع‌اند. بنا به قضیهٔ این بخش، یکی از این بردارها، مثلاً $\mathbf{x}_1$، ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ است. یعنی، $\mathbf{x}_1 = \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3$. دوحالت وجود دارد. یا $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ همخط‌اند یا همخط نیستند. اگر $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ همخط نباشند، درمثالی از بخش قبلی دیده‌ایم که‌آنها صفحه‌ای را که ازمبدأ می‌گذرد پدید می‌آورند. چون $\mathbf{x}_1$ ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ است، الزاماً در صفحهٔ پدید آمده توسط $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ قراردارد. لذا، $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ همگی دریک صفحه که ازمبدأ می‌گذرد واقع‌اند. اگر $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ همخط باشند، خطی را که ازمبدأ می‌گذرد پدید می‌آورند. $\mathbf{x}_1$، که ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ است، الزاماً روی این خط قراردارد. چون $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ روی یک خط واقع‌اند، الزاماً دریک صفحه، و در حقیقت در هر صفحه‌ای که شامل این خط است جای دارند و لذا، الزاماً همصفحه‌اند.



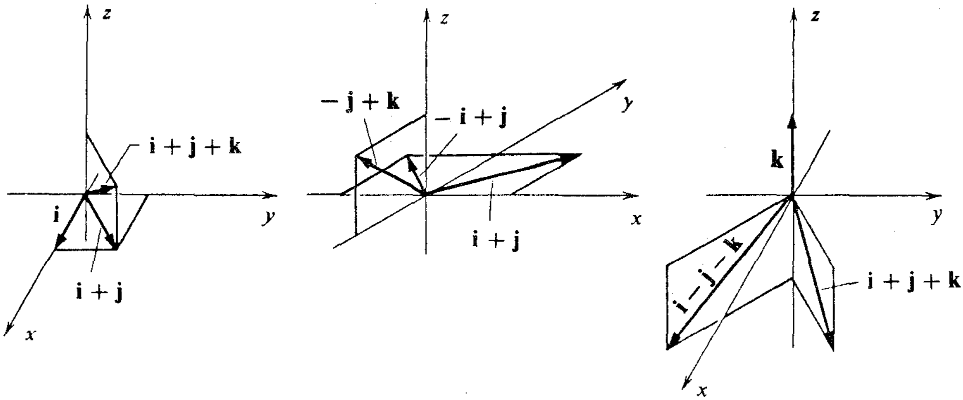
وابستگی خطی　　　　استقلال خطی

شکل ۱۰.۴

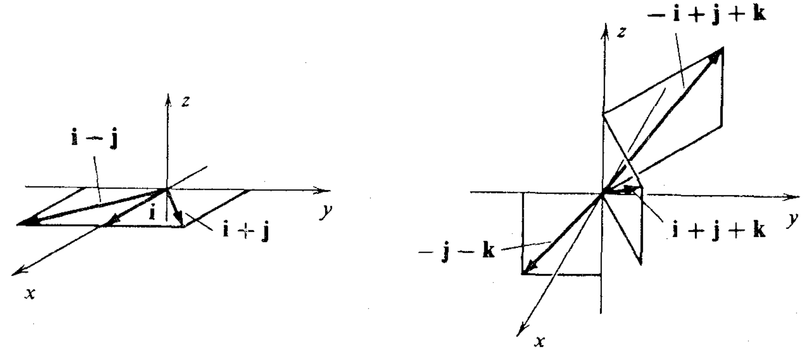
اکنون، می‌بینیم که اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ همگی روی یک صفحه قرار داشته باشند، وابستهٔ خطی‌اند. اگر دوتا از این بردارها، مثلاً $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$، همخط نباشند، بنا به‌مثال بخش قبلی، صفحه‌ای را که درآن قرار دارند پدید می‌آورند، ولی بنا به فرض، $\mathbf{x}_1$ متعلق به این صفحه است و بنابراین، ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{x}_3$ می‌باشد. پس، $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ وابستهٔ خطی‌اند. ازطرف‌دیگر، اگرهرزوج‌ازبردارهای‌مجموعهٔ $\{\mathbf{x}_1 و \mathbf{x}_2 و \mathbf{x}_3\}$ همخط باشند، آنگاه هرسه بردار باید روی خطی که ازمبدأ می‌گذرد واقع باشند. از اینرو، هرسه مضارب‌اسکالر یک بردارند، و بنابراین $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ وابستهٔ خطی‌اند.

با استفاده ازاین محک می‌بینیم‌که مجموعه‌های بردارهای $\{\mathbf{i}\,,\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\,,\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$، $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}\,,\,-\mathbf{i}+\mathbf{j}\,,\,-\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$، و $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\,,\,\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\,,\,\mathbf{k}\}$ مستقل خطی‌اند. (ر. ک. شکل ۱۱.۴.) حال آنکه مجموعه‌های $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}\,,\,\mathbf{i}-\mathbf{j}\,,\,\mathbf{i}\}$ و $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\,,\,-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\,,\,-\mathbf{j}-\mathbf{k}\}$ وابستهٔ خطی‌اند. (ر. ک. شکل ۱۲.۴.)

ماحصل مطالب گفته شده این است که، سه بردار وابستهٔ خطی‌اند اگر همصفحه باشند و دوبردار وابستهٔ خطی‌اند اگر همخط باشند. این مطلب را عمدتاً برای تسهیل شهود هندسی خاطر نشان می‌سازیم. درحل مسائل مشخصی که به استقلال خطی مربوط‌اند، حل



شکل ۱۱۰۴



شکل ۱۲۰۴

معادلات خطی احتمالاً آسانتر از رسم تصاویر است.

مثالی که اکنون می‌آوریم مثال مهمی ازمفهوم پدیدآوردن و استقلال خطی است. در $\mathbf{R}^n$، $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\mathbf{e}_i$ برداری است که همهٔ مؤلفه‌هایش بجز مؤلفهٔ i ام آن صفر است و مؤلفهٔ i ام آن ۱ می‌باشد:

$$\mathbf{e}_i = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ابتدا مشاهده می‌کنیم که این بردارها مستقل خطی‌اند. زیرا اگر فرض کنیم

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n = 0$$

آنگاه

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

یا،

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

همچنین توجه به این نکته مهم است که بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ فضای $\mathbf{R}^n$ را پدید می‌آورند. زیرا اگر $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$،

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$
$$=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}_n$$

چون هر بردار $\mathbf{x}$ ترکیب خطی مناسبی از $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ است، می‌بینیم که $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ فضای $\mathbf{R}^n$ را پدید می‌آورند.

تمرینات

۱. کدامیک از مجموعه‌های زیر از بردارهای $\mathbf{R}^2$، مستقل خطی‌اند؟ به طور هندسی نشان دهید.

(الف) $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-5\\-5\end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ (ه) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ (ز) $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

۲. درفضای ماتریسهای ۲ × ۲، M_{22}، کدامیک از مجموعه‌های زیر مستقل خطی‌اند؟

(الف) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

(ب) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$.

۳. درفضای P_2، کدامیک از مجموعه‌های زیر مستقل خطی‌اند؟

(الف) $1+t$، t، t^2 (ب) $1+t^2$، t^2، $3+t^2$

(ج) $1+t$، $t+t^2$، $1+t^2$

۴. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ بردارهای مستقل خطی در V باشند. نشان دهید که $\mathbf{x}+\mathbf{y}$، $\mathbf{x}+\mathbf{z}$، و $\mathbf{y}+\mathbf{z}$ مستقل خطی‌اند.

۵. کدامیک از مجموعه‌های زیر از بردارهای $\mathbf{R}^3$، مستقل خطی‌اند؟

(الف) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$

۶. چهار بردار در $\mathbf{R}^3$ بیابید به‌طوری که هر دوتا از آنها مستقل خطی و هر سه تا از آنها وابستهٔ خطی باشند.

۷. فرض کنید A_1، A_2، . . .، A_l ماتریسهایی $m \times n$ باشند و B یک ماتریس $n \times p$ باشد. اگر A_1B، A_2B، . . .، A_lB درفضای ماتریسهای $m \times p$ مستقل‌خطی باشند، نشان دهید که A_1، A_2، . . .، A_l درفضای ماتریسهای $m \times n$ مستقل خطی‌اند.

۸. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دوبردار مستقل خطی باشند، نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1\mathbf{x}+\alpha_2\mathbf{y} \quad و \quad \beta_1\mathbf{x}+\beta_2\mathbf{y}$$

مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0$$

۹. نشان دهید که هیچ مجموعهٔ مستقل خطی از بردارها نمی‌تواند شامل بردار صفر باشد.

۱۰. نشان دهید که هر زیر مجموعه از یک مجموعهٔ مستقل خطی از بردارها، مستقل خطی است.

۱۱. نشان دهید که بردارهای

$$\mathbf{e}_1،\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2،\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3،\ \ldots،\ \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\ldots+\mathbf{e}_n$$

در $\mathbf{R}^n$ مستقل خطی‌اند.

۱۲. فرض کنید S گردآورده‌ای از بردارها دریک فضای برداری باشد به نحوی که هر زیر مجموعهٔ دو عنصری از آن وابستهٔ خطی است. نشان دهید که همهٔ بردارهای S مضارب اسکالر یک بردار هستند.

۰۱۳ فرض کنید $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری V باشد. قرار دهید

$$\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

چه شرطی روی اسکالرهای α_i، تضمین خواهد کرد که به ازای هر i، بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_{i-1}$، $\mathbf{y}$، $\mathbf{x}_{i+1}$، ...، $\mathbf{x}_n$ مستقل خطی باشند؟

۰۱۴ فرض کنید X_1، X_2، ...، X_k ماتریسهای $m \times n$ ای باشند که درفضای ماتریسهای $m \times n$ مستقل خطی‌اند. اگر A یک ماتریس وارون پذیر $m \times m$ و B یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد، نشان دهید که ماتریسهای AX_1B، AX_2B، ...، AX_kB در فضای ماتریسهای $m \times n$ مستقل خطی‌اند.

۰۱۵ فرض کنید V یک فضای برداری و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ بردارهایی در V باشند. اگر $\mathbf{x}_1 \neq 0$، $\mathbf{x}_2 \notin \mathrm{sp}(\{\mathbf{x}_1\})$، $\mathbf{x}_3 \notin \mathrm{sp}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\})$، ...، $\mathbf{x}_n \notin \mathrm{sp}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\})$، نشان دهید که بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ مستقل خطی‌اند.

۰۱۶ فرض کنید f_1 و f_2 دو چند جمله‌ای هستند و نقاط x_1 و x_2 وجود دارند به طوری‌که

$$f_1(x_1) = 1 \quad , \quad f_2(x_1) = 0$$
$$f_1(x_2) = 0 \quad , \quad f_2(x_2) = 1$$

نشان دهید که f_1 و f_2 درفضای همهٔ چند جمله‌ایها مستقل خطی‌اند.

۰۱۷ اگر $A \neq 0$ یک ماتریس متقارن باشد و $B \neq 0$ یک ماتریس متقارن کج درفضای ماتریسهای $n \times n$، نشان دهید که A و B مستقل خطی‌اند.

۰۱۸ اگر f و g دو چند جمله‌ای باشند و

$$\begin{vmatrix} f(0) & g(0) \\ f'(0) & g'(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

نشان دهید که f و g درفضای چند جمله‌ایها مستقل خطی‌اند.

۶ پایه

در آخرین مثال از بخش قبلی، متذکر شدیم که مجموعهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ از بردارها، مستقل خطی است و فضای $\mathbf{R}^n$ را پدید می‌آورد. این قبیل مجموعه‌ها درنظریهٔ فضای‌برداری اهمیت فراوان دارند و لذا تعریف زیر را داریم:

تعریف گیریم V یک فضای‌برداری باشد و $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ گردآورده‌ای از بردارها در V. مجموعهٔ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ را یک **پایه** برای V می‌نامند اگر

(۱) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از بردارها باشد، و

(۲) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ فضای V را پدید آورد.

برطبق این تعریف، بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، . . .، $\mathbf{e}_n$ پایه‌ای بـرای $\mathbf{R}^n$ تشکیل می‌دهند. این پایهٔ بخصوص، آنقدر زیاد به کار می‌رود که آن را **پایهٔ متعارف** برای $\mathbf{R}^n$ می‌نامند. به عنوان مثالی دیگر، مجموعهٔ بردارهای $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ را درنظر می‌گیریم که در آن

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

برای اینکه نشان دهیم این مجموعه از بردارها فضای $\mathbf{R}^3$ را پدید می‌آورد، بـایـد نشان دهیم که به ازای هربردار مفروض

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ در } \mathbf{R}^3.$$

اسکالرهای α_1، α_2، و α_3 وجود دارند به نحوی که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3$. با رجوع به مؤلفه‌ها، این تساوی تبدیل می‌شود به

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \quad\quad + 2\alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \quad\quad \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، باید دستگاه معادلات خطی زیر را برای α_1، α_2 و α_3 حل کنیم.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2} + 2\alpha_3 \\ y &= -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ z &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

چون دترمینان این دستگاه،

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

است، می‌بینیم‌که دستگاه معادلات حل‌پذیر است و ازاینجا نتیجه می‌شود که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ فضای $\mathbf{R}^3$ را پدید می‌آورد.

برای اینکه ثابت کنیم مجموعهٔ فوق مستقل خطی است، فـرض می‌کنیم اسکالرهـای α_1، α_2، و α_3 وجود داشته باشند به‌طوری که $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 = 0$. با تبدیل این تساوی به دستگاه معادلات خطی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2} + 2\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \phantom{{}+3\alpha_3} &= 0 \end{aligned}$$

چون دترمینان ماتریس ضرایب غیرصفر است، تنها جواب دستگاه $\alpha_1 = 0$، $\alpha_2 = 0$، و

$\alpha_3 = 0$ است. لذا، بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ مستقل خطی‌اند. و با توجه به اینکه آنها فضای $\mathbf{R}^3$ را پدید می‌آورند، می‌بینیم که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ پایه‌ای برای فضای $\mathbf{R}^3$ است.

خاصیت جالبی از پایه‌ها درقضیهٔ زیر نشان داده می‌شود.

قضیه مجموعهٔ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ درفضای برداری V، پایه‌ای است برای V اگر و فقط اگر به ازای هر $\mathbf{x}\in V$، اسکالرهای یکتای α_1، α_2، ...، α_n وجود داشته باشند به طوری که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$.

اثبات فرض‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک پایه باشد. دراین‌صورت $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ فضای V را پدید می آورد. لذا، اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n وجود دارند به طوری که

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

برای اینکه نشان دهیم اسکالرها یکتا هستند، فرض می‌کنیم که‌درضمن داشته باشیم

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{x}_n$$

در این صورت

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \beta_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{x}_n$$

یا

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{x}_n = 0$$

چون $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است، داریم

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \text{، } \ldots \text{، } \alpha_n - \beta_n = 0$$

یا

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{، } \ldots \text{، } \alpha_n = \beta_n$$

درنتیجه اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n یکتا هستند.

ازطرف دیگر، فرض می‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مجموعه‌ای باشد که هر $\mathbf{x}\in V$ را بتوان به طور یکتا به صورت $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ نوشت. دراین‌صورت واضح است که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ فضای V را پدید می‌آورد. برای اینکه ثابت کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مستقل خطی است، فرض می‌کنیم $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$. می‌دانیم که $0\cdot\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\cdot\mathbf{x}_n = 0$. بنابراین، بردار صفر به صورت دو ترکیب‌خطی از $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ نوشته شده است، وچون بنا به فرض، ضرایب این دو ترکیب‌خطی به طور یکتا معین شده‌اند، باید داشته باشیم $\alpha_1 = 0$، $\alpha_2 = 0$، ...، $\alpha_n = 0$. پس، ثابت کرده‌ایم که مجموعهٔ فوق مستقل خطی است. ●

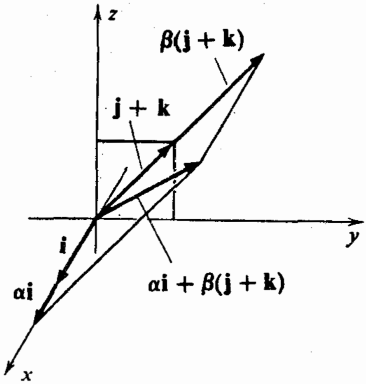
برای مثال، در P_n هرعنصر را می‌توان به صورت ترکیب خطی یکتایی از

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ نوشت. پس، می‌بینیم که $\{1, x, \dots, x^n\}$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهد.

گیریم L زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$، مرکب از بردارهای واقع برصفحهٔ معینی که از مبدأ می‌گذرد، باشد.

دربخش ۴.۴ که مفهوم پدیدآوردن را بررسی‌کردیم، دیدیم‌که هردو بردار ناهمخط در L، این زیرفضا را پدید می‌آورند. در بخش ۵.۴ که در باب استقلال خطی بود، دیدیم که هر دو بردار ناهمخط در $\mathbf{R}^3$ مستقل خطی‌اند. لذا، اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ناهمخط در L باشند، می‌بینیم که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، L را پدید می‌آورند و مستقل خطی‌اند. از اینرو، به‌منظوریافتن پایه‌ای برای L، فقط احتیاج داریم که دوبردار ناهمخط در L انتخاب کنیم.

برای مثال، در $\mathbf{R}^3$، صفحهٔ مرکب از نقاط (x, y, z) را که درآنها $y = z$، درنظر می‌گیریم. (ر.ک. شکل ۱۳.۴.)



شکل ۱۳.۴

یک جفت بردار ناهمخط روی این صفحه عبارت است از $\{\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$، لذا، هر بردار واقع برصفحهٔ $y = z$ را می‌توان به‌طور یکتا به صورت $\alpha\mathbf{i} + \beta(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ نوشت.

تمرینات

۱. کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر پایه‌ای برای $\mathbf{R}^2$ است؟

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$　(ب) $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$　(ج) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۷ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$　(ه) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۲ \end{bmatrix}$　(و) $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$

(ز) $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۲. کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر پایه‌ای برای $\mathbf{R}^3$ است؟

(الف) $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$

(ه) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

۳. نشان دهید که هریک از زیرمجموعه‌های داده شده در زیر، پایه‌ای برای زیرفضایی از فضای ماتریسهای 2×2 است که مقابل آن نوشته شده است.

(الف) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$؛ ماتریسهای متقارن 2×2.

(ب) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$؛ ماتریسهای متقارن کج 2×2.

(ج) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$؛ ماتریسهای متقارن 2×2.

(د) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$؛ ماتریسهای بالا مثلثی 2×2.

(ه) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$؛ تمام ماتریسهای 2×2.

(و) $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$؛ ماتریسهای 2×2ای مانند A به طوری که

$$A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

(ز) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$؛ ماتریسهای 2×2 که با $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ جابجا می‌شوند.

۴. نشان دهید که هریک از مجموعه‌های زیر، پایه‌ای بـرای P_3، فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر t، است.

(الف) 1، t، t^2، $1 + t + t^2 + t^3$

(ب) 1، $1 + t$، $(1 + t)^2$، $(1 + t)^3$

(ج) 1، $1 + t$، $1 + t^2$، $1 + t^3$

(د) 1، $1 + t$، $1 + t + t^2$، $1 + t + t^2 + t^3$

(ه) $1 + t$، $1 - t$، $t^2 + t^3$، $t^2 - t^3$

۵. گردآوردهٔ تمام چند جمله‌ایهای دو متغیره که درجهٔ آنها بیشتر از ۲ نباشد، یعنی، چند-جمله‌ایهای به صورت

$$a_0 + b_1 x + b_2 y + c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2$$

را، با تعاریف معمولی جمع، وضرب اسکالر، درنظر بگیرید. نشان‌دهید که‌این چندجمله‌ایها یک فضای برداری تشکیل می‌دهند و پایه‌ای برای این فضا معین کنید.

۶. پایه‌ای برای هریک از فضاهای زیر بیابید.

(الف) ماتریسهای متقارن ۳ × ۳.
(ب) ماتریسهای متقارن کج ۳ × ۳.
(ج) ماتریسهای ۳ × ۲.
(د) ماتریسهای ۲ × ۳.
(ه) چندجمله‌ایهای زوج از درجهٔ نابیشتر از n.
(و) زیر فضایی ازفضای برداری چند جمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از ۳، که در $x = ۱$، صفر می‌شوند.
(ز) زیرفضایی از $\mathbf{R}^n$ مرکب از بردارهایی که دو مؤلفهٔ اول‌آنها صفر باشند.
(ح) ماتریسهای قطری ۴ × ۴.

۷. درفضای ماتریسهای $n \times m$، فرض کنید E_{ij} نشانگر ماتریسی باشد که درایهٔ $(i ، j)$ آن ۱ و بقیهٔ درایه‌هایش صفر باشند.

(الف) نشان دهید که ماتریسهای E_{ij} پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times m$ تشکیل می‌دهند.
(ب) با انتخاب زیرمجموعهٔ مناسبی از E_{ij}ها، پایه‌ای برای فضای ماتریسهای بالامثلثی و نیز فضای ماتریسهای قطری بیابید.

۸. پایه‌ای برای فضای ماتریسهای ۲ × ۲ای بیابیدکه مرکب است از:
(الف) فقط ماتریسهای A به‌طوری که $A^2 = A$ (ماتریس را **خود توان** می‌نامند اگر $A^2 = A$)؛
(ب) فقط ماتریسهای وارون پذیر.

۹. نشان دهید که نمی‌توان پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times n$ یافت به قسمی که هردو عنصر از این پایه با هم جابجا شوند.

۱۰. ماتریسهای

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ،\quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ،\quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

را ماتریسهای اسپین پائولی[1] می‌نامند.
(الف) نشان دهید که

---

1. Pauli

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x$$
$$\sigma_x\sigma_z = -\sigma_z\sigma_x$$
$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y$$

(ب) نشان دهید که این ماتریسها همراه با ماتریس همانی پایه‌ای برای فضای ماتریسهای ۲×۲ با درایه‌های مختلط تشکیل می‌دهند.

۱۱. آیا می‌توان پایه‌ای برای P_n یافت چنانکه هر عنصر آن برچند جمله‌ای $f(x) = x$ قابل قسمت باشد؟

۱۲. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، . . . ، A_m گردآورده‌ای از ماتریسهای $n \times n$ باشد. اگر $\mathbf{x} \neq ۰$ یک n- بردار باشد به طوری که $A_۱\mathbf{x} = A_۲\mathbf{x} = \ldots = A_m\mathbf{x} = ۰$، نشان دهید که ماتریسهای $A_۱$، $A_۲$، . . . ، A_m پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times n$ تشکیل نمی‌دهند.

۱۳. اگر $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، و $\mathbf{x}_۳$ پایه‌ای برای فضای برداری حقیقی V تشکیل دهند، نشان دهید که به‌ازای هرعدد حقیقی t، $(۱ + t)\mathbf{x}_۱ + (۱ + t^۲)\mathbf{x}_۲ + (t^۴ + t^۲)\mathbf{x}_۳$ غیرصفراست.

۷ بعد

به منظور مطالعهٔ بیشترموضوع، گردآورده‌ای از فضاهای برداری را که به تعبیری «کوچک» هستند ومخصوصاً برای‌کاربرد مناسب‌اند، انتخاب می‌کنیم. لذا، گوییم که فضای برداری V **متناهی‌البعد** است اگر تعدادی متناهی از بردارها بتوانندآن را پدیدآورند. مثالهای قبلی نشان می‌دهند که هم $\mathbf{R}^n$ و هم P_n متناهی‌البعدند.

اولین هدف ما اثبات این مطلب است که هر فضایی که توسط تعداد متناهی بردار پدیدآید دارای یک پایهٔ متناهی است. قبل از آن لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم گیریم V یک فضای برداری باشد. فرض می‌کنیم $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . . ، $\mathbf{x}_n$ فضای V را پدید می‌آورند و بردارهای $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . . ، $\mathbf{x}_n$ وابستهٔ خطی‌اند. در این صورت با حذف بردار مناسبی از مجموعهٔ $\{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_n\}$، مثلاً $\mathbf{x}_i$، می‌توانیم مجموعهٔ

$$\{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_{i-۱}, \mathbf{x}_{i+۱}, \ldots, \mathbf{x}_n\}$$

را به دست‌آوریم که‌آن هم V را پدید می‌آورد.

اثبات چون بردارهای $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . . ، $\mathbf{x}_n$ وابستهٔ خطی‌اند، طبق قضیهٔ بخش ۵.۴.، یکی از این بردارها، مثلاً $\mathbf{x}_i$، ترکیبی خطی از بقیهٔ بردارهای این مجموعه است؛ پس به ازای اسکالرهای $\beta_۱$، . . . ، $\beta_{i-۱}$، $\beta_{i+۱}$، . . . ، β_n داریم:

$$\mathbf{x}_i = \beta_۱\mathbf{x}_۱ + \cdots + \beta_{i-۱}\mathbf{x}_{i-۱} + \beta_{i+۱}\mathbf{x}_{i+۱} + \cdots + \beta_n\mathbf{x}_n$$

حال، گیریم $\mathbf{x}$ برداری دلخواه در V باشد. چون $\{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ فضای V را پدید می‌آورد، اسکالرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، . . . ، α_n وجود دارند به نحوی که

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{x}_i + \alpha_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

اگر در تساوی اخیر به‌جای $\mathbf{x}_i$ مقدارش را از تساوی قبلی قرار دهیم، می بینیم که $\mathbf{x}$ را می توان به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_{i-1}$، $\mathbf{x}_{i+1}$، . . .، $\mathbf{x}_n$ نوشت.

بنابراین، هر بردار در V، ترکیبی خطی از $\mathbf{x}_1$، . . .، $\mathbf{x}_{i-1}$، $\mathbf{x}_{i+1}$، . . .، $\mathbf{x}_n$ است، که نشان می‌دهد این مجموعه فضای V را پدید می آورد. ●

با استفاده از این لم، می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱ گیریم V فضایی برداری باشد که توسط تعداد متناهی بردار پدیدآمده باشد. در این صورت V دارای یک پایهٔ متناهی است.

اثبات فرض می‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ فضای V را پدید می آورد. اگر $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی باشد، یک پایه است، و اثبات تمام می‌شود. پس فرض می‌کنیم این مجموعه مستقل خطی نباشد. بنا به لم قبلی، می‌توان برداری از این مجموعه حذف کرد و مجموعهٔ کوچکتری به دست‌آورد که آن هم V را پدید می‌آورد. اگر این مجموعهٔ جدید مستقل خطی باشد، اثبات تمام است، زیرا دراین صورت یک پایهٔ متناهی داریم. اگرمستقل خطی نباشد، می‌توانیم مجموعهٔ بازهم کوچکتری که فضای V را پدیدآورد به دست آوریم. با تکرار این فرایند، بالاخره به یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌رسیم که فضای V را پدید می‌آورد و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود. ●

درواقع اثبات فوق حکم قوی‌تری را به دست می‌دهد: اگر $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک فضای برداری V را پدید آورد، زیر مجموعه‌ای از $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V است.

گیریم H زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$ باشد که از بردارهای واقع بر یک صفحهٔ معین ماربرمبدأ تشکیل شده است. می‌خواهیم تعداد اعضای یک پایهٔ H را معین کنیم. دربخش ۵.۴، دیدیم که هر مجموعهٔ مرکب از سه بردار همصفحه در $\mathbf{R}^3$، الزاماً وابستهٔ خطی است. لذا، یک پایه برای H، ازآنجا که باید متشکل از بردارهای مستقل خطی باشد، دارای حداکثر دو برداراست. چون اعضای هرپایهٔ H یک صفحه را پدید می‌آورند، هیچ پایهٔ H نمی‌تواند فقط یک بردار داشته باشد. لذا، هرپایهٔ H باید دقیقاً دو عضو داشته باشد.

این موضوع جالب و مفید، یعنی اینکه تعداد بردارهای هر دو پایه مساوی است، در هرفضای برداری متناهی‌البعد درست است. این نتیجه ازقضیهٔ بعدی بلافاصله حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۲ گیریم V یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد و $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک پایهٔ n عنصری برای V. اگر $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ مجموعهٔ m بردارمستقل خطی در V باشد، آنگاه $m \leqslant n$.

قضیهٔ ۲ را به این صورت نیز می‌توان بیان کرد: اگر V فضای برداری متناهی‌البعدی باشد که دارای یک پایهٔ n عنصری است، و $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ مجموعه‌ای ازبردارهای V

به طوری که $m > n$، آنگاه بردارهای $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_m$ وابستهٔ خطی‌اند. حکم دوم را ثابت می‌کنیم.

اثبات فرض می‌کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. برای اینکه نشان دهیم مجموعهٔ $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ وابستهٔ خطی است، باید اسکالرهای β_1، β_2، ...، β_m را که لااقل یکی از آنها صفر نیست، داشته باشیم به‌قسمی که

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{y}_j = \beta_1 \mathbf{y}_1 + \beta_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \beta_m \mathbf{y}_m = 0$$

چون $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V است، اسکالرهای α_{ij} وجود دارند به طوری که

$$\mathbf{y}_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{x}_i$$

لذا، می‌خواهیم β_1، β_2، ...، β_m را بیابیم به نحوی که

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{x}_i \right) = 0$$

یا

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \beta_j \right) \mathbf{x}_i = 0$$

پس، اگر بتوانیم جوابی غیر بدیهی برای دستگاه معادلات همگن

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\beta_1 + \cdots + \alpha_{1m}\beta_m &= 0 \\ \alpha_{21}\beta_1 + \cdots + \alpha_{2m}\beta_m &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{n1}\beta_1 + \cdots + \alpha_{nm}\beta_m &= 0 \end{aligned}$$

بیابیم، قضیه ثابت می‌شود. چون $m > n$، تعداد مجهولات در این دستگاه بیشتر از تعداد معادلات است، ازاینرو، بنا به بخش ۴.۱، می‌دانیم که یک جواب غیربدیهی وجود دارد. ●

بلافاصله، قضیهٔ زیر را به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳ تعداد عناصر هر دو پایه برای یک فضای برداری متناهی‌البعد، مساوی است.

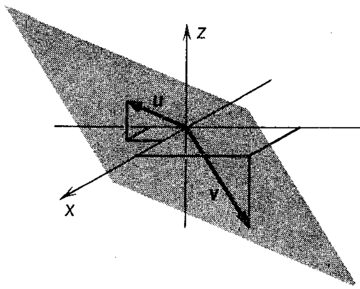
اثبات گیریم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ و $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ دو پایه برای فضای برداری متناهی‌البعد V باشند. چون $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است و $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ یک پایه است، بنا به قضیهٔ قبلی، $m \geqslant n$. همچنین چون $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است و $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ یک پایه است، داریم $n \geqslant m$. در نتیجه $m = n$. ●

برای $\mathbf{R}^n$، پایهٔ متعارف $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ با n عنصر را ارائه دادیم. طبق قضیهٔ ۳، می‌بینیم که هر پایهٔ دیگر نیز باید دارای n عنصر باشد.

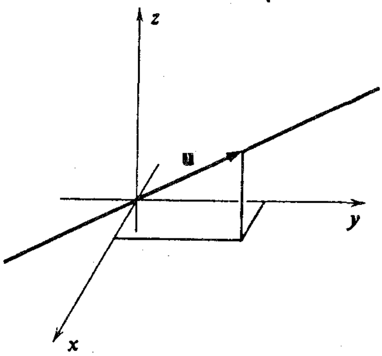
اگر V یک فضای متناهی‌البعد باشد، **بعد** V بنا به تعریف، عبارت است از تعداد عناصر یک پایهٔ V. طبق قضیهٔ ۳، این عدد مستقل از پایه‌ای است که انتخاب می‌کنیم. بعد V را اغلب با $\dim V$ نشان می‌دهند. بر طبق این تعریف $\dim \mathbf{R}^n = n$.

دیده‌ایم که در $\mathbf{R}^3$، بردارهای واقع برهر خطی که از مبدأ می‌گذرد، همگی مضارب اسکالر یک بردارند. لذا، اگر H نشانگر زیر فضایی از $\mathbf{R}^3$ باشد که فقط از بردارهای واقع بریک خط ماربرمبدأ، تشکیل شده است، می‌بینیم که $\dim H = 1$. پس با تعریفی که برای بعد ارائه دادیم، عبارت: خط یک «شیء یک بعدی» است، عبارت دقیقی است. (ر. ک. شکل ۱۴.۴.)

اگر به طور مشابه، فرض کنیم K نشانگر بردارهای واقع بر یک صفحهٔ مار برمبدأ باشد، آنگاه، همچنانکه دیده‌ایم K، دارای پایه‌ای با دو بردار است ولذا $\dim K = 2$. از اینرو می‌بینیم که عبارت: صفحه یک «شیء دو بعدی» است، کاملاً با معنی است. (ر. ک. ۱۵.۴.)



شکل ۱۵.۴



شکل ۱۴.۴

مثال ۱ گیریم P_n فضای چند جمله‌ایهایی باشد که درجهٔ آنها بیشتر از n نیست. دیده‌ایم که 1، x، x^2، …، x^n پایه‌ای برای P_n است. چون مجموعهٔ $\{1, x, \ldots, x^i, \ldots, x^n\}$ دارای $n+1$ عنصراست، می‌بینیم که $\dim P_n = n + 1$.

مثال ۲ مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با درایه‌های حقیقی، M_{22}، را درنظرمی‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یک پایه تشکیل می‌دهند.

برای بررسی این مطلب، توجه می‌کنیم که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ c & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & d \end{bmatrix}$$
$$= a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا، مجموعهٔ داده شده، فضای ماتریسهای ۲ $\times$ ۲ را پدید می‌آورد. اگر

$$a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $a = b = c = d = ۰$

پس، مجموعهٔ ماتریسهای داده شده، مستقل خطی است. چون فضای ماتریسهای ۲ $\times$ ۲ با درایه‌های حقیقی، دارای پایه‌ای با چهارعنصر است، بعدآن ۴ می‌باشد.

مثال ۳ دستگاه معادلات همگن

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ x_۱ - x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم.

آن را به صورت ماتریسی می‌نویسیم،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

در مثال ۲، از بخش ۳.۴، دیده‌ایم که مجموعهٔ جوابها زیر فضایی از $\mathbf{R}^۴$ تشکیل می‌دهد. می‌خواهیم پایه‌ای برای این زیر فضا بیابیم و بعدآن را حساب کنیم.

روش حذفی گاوسی را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ x_۱ - x_۲ + x_۳ + ۲x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

مجهول $x_۱$ و معادلهٔ اول را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ -۳x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

مجهول $x_۴$ و معادلهٔ دوم را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_۱ + ۵x_۲ - ۳x_۳ &= ۰ \\ -۳x_۲ + ۲x_۳ + x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

چون همهٔ معادلات را به‌کار برده‌ایم، این جریان به پایان می‌رسد.
اگر بگیریم $x_۲ = c$ و $x_۳ = d$، که c و d اعداد دلخواه‌اند وآنگاه انتخاب کنیم

$$\begin{aligned} x_۱ &= -۵c + ۳d \\ x_۴ &= \quad ۳c - ۲d \end{aligned}$$

می‌بینیم که هر جوابی از دستگاه به صورت

$$\begin{bmatrix} -۵c + ۳d \\ c \\ d \\ ۳c - ۲d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

است. از اینرو ملاحظه می‌شود که بردارهای

$$\begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

فضای جوابها را پدید می‌آورند. چون این دو بردار بوضوح مستقل خطی‌اند، پایه‌ای برای فضای جوابها تشکیل می‌دهند. ازآنجا که فضای جوابها، یک فضای برداری دوبعدی است، معنی دقیق این جمله که: جوابها یک «خانوادهٔ دوپارامتری» تشکیل می‌دهند، معلوم است.

تمرینات

۱. در هر یک از موارد زیر، بعد زیرفضای داده شده از فضای ماتریسهای ۲×۲ را حساب کنید.

(الف) ماتریسهای قطری.
(ب) ماتریسهای متقارن.
(ج) ماتریسهای متقارن کج.
(د) ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.
(ه) ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} ۰ & a \\ ۰ & b \end{bmatrix}$.
(و) ماتریسهای بالا مثلثی.
(ز) ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$.

۲. در هریک از موارد زیر، بعد زیرفضای داده شده از فضای برداری $P_۳$ را حساب کنید.

(الف) $\{f \mid f(۰) = ۰\}$ (ب) $\{f \mid f(۱) = ۰\}$
(ج) $\{f \mid f(۰) = f'(۰) = ۰\}$ (د) $\{f \mid f'(۰) + f(۰) = ۰\}$

۳. فرض کنید $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ اعداد صحیح باشند. بعد زیرفضایی از $\mathbf{R}^m$ متشکل از تمام بردارهایی که مؤلفه‌های i_1ام، i_2ام،...، و i_nام آنها صفرند، راحساب کنید. $(m \geqslant n)$.

۴. پایه‌ای برای فضای جوابهای هر یک از دستگاههای معادلات خطی همگن زیر بیابید. بعد هر یک از فضاها چقدر است؟

(الف)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

(ج.)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(د)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(ه)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

۵. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد مختلط با جمع وضرب اسکالرمعمولی، یک فضای برداری دو بعدی روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد.

۶. بعد فضای ماتریسهای قطری $n \times n$ چقدر است؟

۷. اگر f یک چند جمله‌ای ازدرجهٔ n باشد، نشان دهید که f، f'، f''، ...، $f^{(n)}$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند.

۸. نشان دهید که بعد فضای ماتریسهای $m \times n$ برابر است با mn.

۹. فرض کنید H_e زیرفضایی از P_n متشکل از چند جمله‌ایهای زوج و H_o زیرفضایی از P_n مرکب از چند جمله‌ایهای فرد باشد. بعد H_o و بعد H_e چقدر است؟

۱۰. بعد فضای ماتریسهای بالا مثلثی $n \times n$ چقدر است؟

۱۱. نشان دهیدکه بعدفضای ماتریسهای متقارن $n \times n$، برابر $n(n+1)/2$ است. حال آنکه بعد فضای ماتریسهای متقارن کج، $n(n-1)/2$ می‌باشد.

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی باشد. اگر V توسط $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$، مجموعه‌ای از n بردار پدید آمده باشد، نشان دهید که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مستقل خطی است.

۱۳. نشان دهید که فضای چند جمله‌ایهای دو متغیره‌ای که درجهٔ آنها بیشتر از n نیست، یعنی، همهٔ چند جمله‌ایهای به صورت

$$\sum_{\substack{0 \leqslant i+j \leqslant n \\ 0 \leqslant i \\ 0 \leqslant j}} a_{ij} x^i y^j$$

تحت جمع، و ضرب اسکالر معمولی، یک فضای برداری تشکیل می‌دهند، و نشان دهید که

بعد این فضا، $(n+1)(n+2)/2$ است.

۱۴. اگر $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، و $\mathbf{z}$ پایه‌ای برای یک فضای برداری ۳ بعدی تشکیل دهند، نشان دهید که $\mathbf{x}+\mathbf{y}$، $\mathbf{y}+\mathbf{z}$، و $\mathbf{x}+\mathbf{z}$ نیز یک پایه تشکیل می‌دهند.

۱۵. اگر f_0، f_1، ...، f_{n+1} چند جمله‌ایهایی باشند که درجهٔ آنها بیشتر از n نیست، نشان دهید اسکالرهای α_0، α_1، ...، α_{n+1}، کـه لااقل یکی از آنها صفر نیست، وجود دارند بـه طوری‌که $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0$.

۱۶. نشان دهید که هر ماتریس $n \times n$ بـا درایه‌های حقیقی، در یک معادلهٔ چند جمله‌ای $f(A) = 0$ صدق می‌کند، که $f(x)$ یک چند جمله‌ای غیر صفر بـا ضرایب حقیقی است. [راهنمایی: نشان دهیدکه ماتریسهای I_n، A، A^2، ...، A^{n^2} بایستی وابستهٔ خطی باشند.]

۱۷. فرض کنید A و B اعداد حقیقی ثابتی باشند. فرض کنید V گردآوردهٔ همهٔ دنباله‌های حقیقی نامتناهی $(c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)$ باشد که در رابطهٔ بازگشتی $c_{k+2} = Ac_k + Bc_{k+1}$ صدق می‌کنند.

(الف) با جمع معمولی (یعنی جمله به جمله) وضرب اسکالرمعمولی، نشان دهید که V یک فضای برداری حقیقی است.

(ب) نشان دهید که c_0 و c_1، تمام جملات دیگر دنباله را معین می‌کنند.

(ج) نشان دهیدکه هرعنصر V، ترکیبی‌خطی ازدنباله‌های $(0, 1, \dots)$ و $(1, 0, \dots)$است.

(د) نشان دهیدکه $\dim V = 2$.

(هـ) فرض کنید t ریشه‌ای از چند جمله‌ای $x^2 - Bx - A = 0$ باشد. نشان دهید که (اگر t حقیقی باشد) دنبالهٔ $(1, t, t^2, t^3, \dots)$ در V است.

(و) اگر $x^2 - Bx - A$ دارای دو ریشهٔ متمایـز حقیقی s و t باشد، نشان دهید که هر عنصر V، ترکیبی خطی از $(1, s, s^2, s^3, \dots)$ و $(1, t, t^2, t^3, \dots)$ است.

(ز) دنبالهٔ فیبوناتچی[1] به این صورت تعریف می‌شود: جملهٔ صفرام دنباله ۰ است، جملهٔ اولش ۱ و ازآن به بعد، هر جمله حاصلجمع دو جملهٔ قبل از خودش می‌باشد؛ این دنباله به صورت $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ است. نشان دهید که

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

۱۸. اگر دنبالهٔ $(0, 1, 3, 13, 51, \dots)$ بـا قاعدهٔ تمرین قبلی معین شده باشد، A و B را بیابید و فرمولی کلی برای جملهٔ nام این دنباله به دست‌آورید.

۸ خواص دیگری از فضاهای متناهی‌البعد

در این بخش، بعضی از نتایج قضایای بخشهای قبلی را می‌آوریم.

---

1. Fibonacci

قضیهٔ ۱ گیریم V یک فضای برداری باشد و فرض کنیم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$ فضای V را پدید آورند. در این صورت $\dim V \leqslant m$.

اثبات بنا به قضیهٔ ۱، از بخش ۷.۴، زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$، پایه‌ای برای V است. اما $\dim V$ تعداد عناصر هر زیر مجموعه‌ای از V است که پایه باشد. در نتیجه $\dim V \leqslant m$. ●

به عنوان مقدمه‌ای بر قضایای بعدی، داریم:

لم گیریم V یک فضای برداری و H زیر فضایی از آن باشد. فرض کنیم $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای H باشد و $\mathbf{y}$ متعلق به H نباشد. دراین صورت مجموعهٔ $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مستقل خطی است.

اثبات نشان می‌دهیم که اگر $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ وابستهٔ خطی باشد، آنگاه $\mathbf{y}\in H$، که نتیجه حاصل است.

پس فرض می‌کنیم که $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ وابستهٔ خطی باشد. بنابراین اسکالرهای β، α_1، α_2، ...، α_n که لااقل یکی ازآنها غیرصفر است، وجود دارند به‌طوری که

$$\beta\mathbf{y} + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$$

حال، β صفر نیست. زیرا اگر $\beta = 0$، آنگاه $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = 0$. چون لااقل یکی ازاسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n صفر نیست، نتیجه می‌شود که $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ وابستهٔ خطی‌اند. اما بنا به فرض، $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ مستقل خطی‌اند. در نتیجه $\beta \neq 0$.

چون $\beta \neq 0$، داریم $\mathbf{y} = (-\beta^{-1}\alpha_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (-\beta^{-1}\alpha_n)\mathbf{x}_n$. لذا، $\mathbf{y}$ یک ترکیب خطی از بردارهای H است و در نتیجه متعلق به H می‌باشد. ●

گیریم H زیر فضایی از $\mathbf{R}^3$، مرکب از بردارهای واقع بر صفحهٔ ثابتی که از مبدأ می‌گذرد، باشد. در بخش ۴.۴، دیدیم که ترکیبات خطی دو بردار ناهمخط در H، زیرفضای H را پرمی‌کنند. بیان این موضوع با اصطلاحات جبری به این صورت است: دو بردارمستقل خطی در H، زیر فضای H را پدید می‌آورند و بنابراین پایه‌ای برای H تشکیل می‌دهند. تعمیم این نتیجه به فضاهای متناهی‌البعد دلخواه در قضیهٔ بعدی عرضه می‌شود.

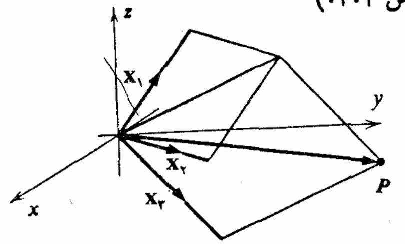
قضیهٔ ۲ گیریم V یک فضای برداری با بعد n باشد. اگر $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مجموعه‌ای از n بردار مستقل خطی در V باشد، آنگاه $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V است.

اثبات گیریم $L = \mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $L = V$.

اگر $L \neq V$، برداری مانند $\mathbf{y}$ در V وجوددارد به‌قسمی‌که $\mathbf{y}\notin L$. بنا به‌لم قبل، بردارهای مجموعهٔ $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مستقل خطی‌اند. اما مجموعهٔ $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ دارای

$n+1$ عنصر است وطبق قضیهٔ ۲ از بخش ۷.۴، می‌دانیم که در هر فضای برداری n بعدی، می‌توانیم حداکثر n بردار مستقل خطی بیابیم.
لذا، فرض $L \neq V$ غلط است و بنابراین $L = V$. ●

این قضیه را می‌توانیم در $\mathbf{R}^3$ تعبیر کنیم. اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\mathbf{x}_3$ سه بردار مستقل خطی دلخواه در $\mathbf{R}^3$ باشند، آنگاه $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، و $\mathbf{x}_3$ پایه‌ای برای $\mathbf{R}^3$ تشکیل می‌دهند. در اصطلاح هندسی، هرسه بردار ناهمصفحه (یعنی، مستقل خطی) در $\mathbf{R}^3$، فضای $\mathbf{R}^3$ را پدید می‌آورند. شکل ۱۶.۴، این مطلب را نشان می‌دهد. به‌عنوان یک تمرین با ارزش، همین نتیجه را از طریق هندسی با استفاده ازروشی مشابه باروش ساختن مختصات دکارتی درفضای سه‌بعدی، ثابت کنید. (ر. ک. بخش ۲.۲.)



شکل ۱۶.۴

قضیهٔ دیگری داریم که آن نیز به‌طور شهودی قابل قبول است.

قضیهٔ ۳ گیریم V یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد. اگر H زیرفضایی از V باشد، H متناهی‌البعد است و $\dim H \leqslant \dim V$.

اثبات اگر $H = \{0\}$، یعنی H زیرفضای صفرباشد، آنگاه $\dim H = 0 \leqslant \dim V$.
اگر H زیر فضای صفر نباشد، دارای یک عنصر غیر صفر، مثلاً $\mathbf{x}_1$ است. $\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1)$ را در نظرمی‌گیریم. اگر $H = \operatorname{sp}(\mathbf{x}_1)$، H متناهی‌البعد است. اگر $H \neq \operatorname{sp}(\mathbf{x}_1)$، آنگاه بردار $\mathbf{x}_2$ای در H ولی در خارج $\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1)$ وجود دارد. بنا به لم این بخش، $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. اگر $H = \operatorname{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$، H متناهی‌البعد است. اگر $H \neq \operatorname{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$، بردار $\mathbf{x}_3$ای در H ولی در خارج $\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ وجود دارد. طبق همان لم، $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است.
با ادامهٔ این روند، مجموعه‌های بردارهای مستقل خطی $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i\}$ را به دست می‌آوریم. مادامی که $\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i)$ زیرمجموعهٔ سره‌ای از H باشد، می‌توانیم بردار $\mathbf{x}_{i+1}$ ای در H ولی در خارج $\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i)$ پیدا کنیم. در این صورت بنا به لم، مجموعهٔ بزرگتری از بردارهای مستقل $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}\}$ را به دست می‌آوریم. لکن، می‌دانیم که V یک فضای متناهی‌البعد است و هر مجموعهٔ مستقل‌خطی از بردارهای V حداکثر دارای $\dim V$ عنصر است.
بدین ترتیب، سرانجام باید داشته باشیم $H = \operatorname{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i)$ و بنابراین H

متناهی‌البعد است. اگر پایه‌ای برای H انتخاب کنیم، طبق تعریف بعد، می‌دانیم کـه تعداد عناصر این پایه، برابر $\dim H$ است. بنا به قضیهٔ ۲ از بخش ۷.۴، $\dim H \leqslant \dim V$. ●

توجه کنید که قسمت عمدهٔ قضیهٔ قبلی، اثبات این نکته بود که H متناهی‌البعد است. به محض اینکه نکتهٔ مزبور را ثابت کردیم، این موضوع کـه $\dim H \leqslant \dim V$، فوراً نتیجه شد.

به عنوان کاربردی از این قضایا، می‌خواهیم همهٔ زیرفضاهای $\mathbf{R}^3$ را معین کنیم. بنا به قضیهٔ ۳، می‌دانیم که هرزیرفضای H از $\mathbf{R}^3$ متناهی‌البعد است ودرنامساوی $0 \leqslant \dim H \leqslant 3$ صدق می‌کند.

اگر $\dim H = 0$، $H = \{0\}$، یعنی H زیر فضای صفر است.

اگر $\dim H = 3$، پایه‌ای با سه عنصر برای H انتخاب می‌کنیم. طبق قضیهٔ ۲، این پایه، که دارای سه عنصر است، پایه‌ای برای $\mathbf{R}^3$ نیز می‌باشد. لذا $H = \mathbf{R}^3$.

با توجه بـه این دو موضوع، می‌بینیم کـه بعد هر زیر فضای سرهٔ H از $\mathbf{R}^3$ باید در نامساوی $1 \leqslant \dim H \leqslant 2$ صدق کند.

اگر $\dim H = 1$، H مرکب ازتمام مضارب اسکالر یک بردار است، یا به‌عبارت دیگر، H مرکب از تمام بردارهای واقع بر خطی است که از مبدأ می‌گذرد.

اگر $\dim H = 2$، H متشکل از تمام ترکیبات خطی دو بردار ناهمخط است، یا، همان طور که قبلاً دیده‌ایم، H متشکل از تمام بردارهای واقع بـر صفحه‌ای است کـه از مبدأ می‌گذرد.

بنابراین، همان طور کـه بـه طور شهودی نیز قـابل قبول است، می‌بینیم که همهٔ زیر-فضاهای سرهٔ $\mathbf{R}^3$، از خطوط و صفحاتی که از مبدأ می‌گذرند، تشکیل شده‌اند.

تمرینات

۱. اگر H زیر فضایی از فضای ماتریسهای 2×2 باشد، نشان دهید که $\dim H$ مساوی است با ۰، ۱، ۲، ۳، یا ۴.

۲. نشان دهید که چند جمله‌ایهای 1، $x - \alpha$، $(x-\alpha)^2$، ...، $(x-\alpha)^n$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند. (α یک عدد حقیقی دلخواه است.)

۳. اگر f یک چند جمله‌ای از درجهٔ n، و g یک چند جمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از n باشند، نشان دهید که مقادیر ثابت α_0، α_1، ...، α_n وجود دارند به طوری که

$$g = \alpha_0 f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f' \dots + \alpha_n f^{(n)}$$

۴. اگر $\mathbf{x}$ برداری غیر صفر دریک فضای برداری متناهی‌البعد باشد. نشان دهید که $\mathbf{x}$ متعلق به یک پایه است.

۵. اگر یک فضای برداری V توسط $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_k$ پـدیـد آمده باشد، نشان دهید که هر مجموعه‌ای از $k + 1$ بردار در V، وابستهٔ خطی است.

۶. مجموعه‌ای مرکب از $n+1$ بردار متعلق به $\mathbf{R}^n$ بیابید به نحوی که هر زیر مجموعهٔ n عنصری آن، مستقل خطی باشد.

۷. فرض کنید $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری V باشد. اگر $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ زیرمجموعهٔ هیچ مجموعهٔ بزرگتری از بردارهای مستقل خطی V نباشد، نشان دهید که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۸. اگر V و W زیرفضاهایی از یک فضای برداری باشندو $V \subset W$ و $\dim V = \dim W$، نشان دهید که $V = W$.

۹. نشان دهید که هر مجموعهٔ مستقل خطی $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ از بردارها در یک فضای متناهی‌البعد V، رامی‌توان به پایه‌ای برای V گسترش داد. یعنی، بردارهای $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ وجود دارد به‌قسمی که $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۱۰. فرض کنید S مجموعه‌ای از بردارها باشد، که هر زیرمجموعهٔ آن که مرکب از $k+1$ بردار باشد، وابستهٔ خطی است ولی زیر مجموعه‌ای مرکب از k بردار دارد که مستقل خطی است. نشان دهید که هر بردار در S ترکیبی خطی از این k بردار است.

۱۱. اگر V و W زیرفضاهایی از یک فضای برداری باشندو $V \subset W$ و $\dim V \leqslant l \leqslant \dim W$، نشان‌دهیدکه زیرفضایی مانند U وجود دارد به‌طوری که $V \subset U \subset W$ و $\dim U = l$.

۱۲. اگر f_0، f_1، ...، f_n چند جمله‌ایهایی در P_n باشند به قسمی که $\deg f_i = i$، نشان دهید که f_0، f_1، ...، f_n پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند.

۱۳. اگر $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ فضای V را پدیدآورد ولی هیچ زیر مجموعهٔ کوچکتر از آن V را پدید نیاورد، نشان دهید که $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V است.

۱۴. فرض کنید $n+1$ عدد حقیقی متمایز α_0، α_1، ...، α_n داده شده باشند. چند جمله‌ایهای $p_i(x) = (x-\alpha_0)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)$ را در نظربگیرید. نشان دهید که p_0، p_1، ...، p_n پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهند.

۱۵. اگر H زیرفضایی از یک فضای‌برداری متناهی‌البعد V باشد، نشان دهید زیر فضایی مانند K وجود دارد به‌طوری که

$$H + K = V \text{ و } H \cap K = 0$$

۱۶. فرض کنید V یک فضای متناهی‌البعد باشد.

(الف) فرض کنید $H_0 \leqslant H_1 \leqslant H_2 \leqslant H_3 \leqslant \ldots$ یک گردآوردهٔ صعودی از زیر-فضاهای V باشد. نشان دهید که نهایتاً باید داشته باشیم $H_n = H_{n+1} = H_{n+2} = \ldots$.

(ب) فرض کنید $H_0 \geqslant H_1 \geqslant H_2 \geqslant H_3 \geqslant \ldots$ یک خانوادهٔ نزولی از زیر-فضاهای V باشد. نشان دهید که نهایتاً باید داشته باشیم $H_n = H_{n+1} = H_{n+2} = \ldots$.

۱۷. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ گردآورده‌ای از بردارهای V. فرض کنید $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ متعلق به $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ و μ تعداد بیشینهٔ

بـردارهای مستقل خطی در $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ و ν تعداد بیشینهٔ بـردارهای مستقل خطی در $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ باشند. نشان دهید که $\nu \leqslant \mu$.

۱۸. اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ بـردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری V باشند و اگر $\mathbf{x} \notin \mathrm{sp}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$، نشان دهید که $\{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}_n + \mathbf{x}\}$ نیز در V مستقل خطی‌اند.

۱۹. فرض کنید S مجموعهٔ بردارهایی در $\mathbf{R}^n$ باشد که دارای دقیقاً دو مؤلفهٔ غیرصفرند و این مؤلفه‌های غیرصفر، هر دو ۱ می‌باشند. نشان دهید کـه S یک مجموعهٔ مستقل خطی از بردارهاست اگر و فقط اگر $n \leqslant 3$.

۲۰. اگر a یک عدد مختلط غیرحقیقی باشد، نشان دهید کـه a و a^2 پایه‌ای برای فضای اعداد مختلط، به عنوان فضایی برداری روی اعداد حقیقی، تشکیل می‌دهند.

۹ تغییر مختصات

در بسیاری از مسائل مربوط به ریاضی و علوم، استفاده از پایهٔ متعارف مختصاتی $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ مناسبترین نحوهٔ پرداختن به یک مسئلهٔ خاص نیست. برای مثال، درمطالعهٔ مقاطع مخروطی درهندسهٔ تحلیلی مسطحه، اغلب مناسب است که معادلات مقاطع مخروطی را به وسیلهٔ دوران محورها به یک صورت متعارف تبدیل کنیم. مطالب ایـن بخش برای تسهیل این گونه تغییر مختصات، عرضه می‌گردد.

لذا، گیریم V یک فضای n بعدی و $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پـایـه‌ای برای V باشد. همان طورکه دیده‌ایم، به ازای هر $\mathbf{x}$ در V، اسکالرهای یکتای α_1، α_2، ...، α_n وجود دارند بـه طـوری که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. ایـن امر بـه مـا امکان می‌دهد که فضا را با یک دستگاه مختصات نسبت بـه پایهٔ مفروض، مجهز سازیم. ایـن روش مشابه روش تجهیز $\mathbf{R}^n$ با یک دستگاه مختصات نسبت بـه پایهٔ متعارف $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ است. زیرا اگر $\mathbf{x}$ برداری در $\mathbf{R}^n$ باشد،

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$$

در این حالت، مختص iام بـردار $\mathbf{x}$، همـان ضریب $\mathbf{e}_i$ در عبارت خطـی نمایشگر $\mathbf{x}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ است.

پس، اگر $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پـایـه‌ای بـرای V باشد و $\mathbf{x}$ برداری در V و $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$، گوییم که α_i مختص iام $\mathbf{x}$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$ است. پس می‌توانیم به بردار $\mathbf{x}$، nتایی مختصات آن را نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$ منسوب سازیم.

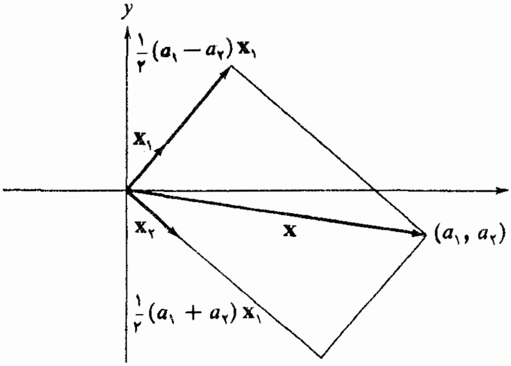
$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \mathbf{x}$$

نماد $\mathscr{B}$ زیر پیکان، نشانگر آن است که α_1، α_2، . . . ، α_n مختصات $\mathbf{x}$ نسبت به $\mathscr{B}$ هستند. چون عبارت $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ برای $\mathbf{x}$ نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ یکتاست، مختصات $\mathbf{x}$ نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ به طور یکتا معین می‌گردند.

به عنوان مثال، می‌خواهیم مختصات یک بردار $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$ را نسبت به پایهٔ $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$، که در آن $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$، حساب‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ و $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/2$. از اینجا، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2\\ &= \frac{1}{2}\alpha_1(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) + \frac{1}{2}\alpha_2(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\mathbf{x}_2.\end{aligned}$$

لذا، $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\\ \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\end{bmatrix} \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \mathbf{x}$. نمایش هندسی برای تجسم این فرایند در شکل ۱۷.۴ آمده است.



شکل ۱۷.۴

برای محاسبهٔ مختصات یک بردار نسبت به یک پایه، مثلاً $\mathscr{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$، با استفاده از مختصاتش نسبت به پایهٔ دیگری، مثلاً $\mathscr{B}' = \{\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n\}$، قاعدهٔ مفیدی وجود دارد. نسبت به پایه‌های $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$، داریم:

$$\mathbf{x} \underset{\mathscr{B}'}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{x} \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

حال، مختصات $\mathbf{x}'_1$، $\mathbf{x}'_2$، . . .، $\mathbf{x}'_n$ را نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathbf{x}'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i = a_{1j}\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{nj}\mathbf{x}_n$. حال گیریم A ماتریسی $n \times n$ به صورت $A = [a_{ij}]_{(nn)}$ باشد. (یعنی، ستون jام A، nتایی مختصات $\mathbf{x}'_j$ نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ است.) پس،

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

برای اثبات این مطلب، مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j \mathbf{x}'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha'_j \mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha'_j \right) \mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

پس، حاصل می‌شود

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha'_j = \alpha_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

اگر این نتیجه را با استفاده از ضرب ماتریسها تعبیر کنیم، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

مثلاً در $\mathbf{R}^3$، گیریم $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$، و $\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\mathbf{x}'_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. در این حالت، مختصات α_1، α_2، α_3، α'_1، α'_2، α'_3 با

قاعدهٔ $\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix}$ به هم مربوط‌اند.

نکتهٔ جالب توجه آن است که ماتریس حاصل از تغییر مختصات همیشه وارون پذیر است.

برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض می‌کنیم $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ یک پایه باشد و $\mathcal{B}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots, \mathbf{x}'_n\}$ پایه‌ای دیگر. گیریم

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\mathcal{B}']{} \mathbf{x} \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

nتایی‌های مختصات بردار $\mathbf{x}$ نسبت به پایه‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ باشند.

فرض کنیم $\mathbf{x}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i$ نمایش $\mathbf{x}'_j$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$، $A = [a_{ij}]_{(nn)}$، و $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{x}'_i$ نمایش $\mathbf{x}_j$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}'$، $B = [b_{ij}]_{(nn)}$ باشند.

در بالا دیدیم که

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$$

بنابراین، برای همهٔ nتایی‌ها

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = BA \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

بنا به لم بخش ۷.۳، نتیجه می‌شود که

$$BA = I_n \quad \text{و} \quad AB = I_n$$

لذا، ماتریس A وارون پذیر است و وارونش ماتریس B می‌باشد.

تذکر دوباره متذکرمی‌شویم که ستون iام A همان nتایی مختصات $\mathbf{x}'_i$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}$ است. ستون iام B nتایی مختصات $\mathbf{x}_i$ نسبت به پایهٔ $\mathcal{B}'$ است.

مثال ۱ گیریم P_4، مطابق معمول، فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x و با درجهٔ نابیشتر از ۴ باشد. دوپایهٔ ۱، x، x^2، x^3 و x^4 و ۱، $(1+x)$، $(1+x)^2$، $(1+x)^3$، $(1+x)^4$ را برای P_4 درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم f در P_4 باشد. پس

$$f = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \alpha_۲ x^۲ + \alpha_۳ x^۳ + \alpha_۴ x^۴$$
$$= \beta_۰ + \beta_۱ (۱ + x) + \beta_۲ (۱ + x)^۲ + \beta_۳ (۱ + x)^۳ + \beta_۴ (۱ + x)^۴$$

اگر ماتریس A را تشکیل دهیم، که ستونهایش، مختصات ۱، $x + ۱$، $(x + ۱)^۲$، $(x + ۱)^۳$، $(x + ۱)^۴$ نسبت به پایهٔ ۱، x، $x^۲$، $x^۳$، $x^۴$ هستند، خواهیم داشت

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا،

$$\begin{bmatrix} \alpha_۰ \\ \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \\ \alpha_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_۰ \\ \beta_۱ \\ \beta_۲ \\ \beta_۳ \\ \beta_۴ \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس B را تشکیل‌دهیم، که ستونهایش، مختصات ۱، x، $x^۲$، $x^۳$، $x^۴$ نسبت به پایهٔ ۱، $x + ۱$، $(x + ۱)^۲$، $(x + ۱)^۳$، $(x + ۱)^۴$ هستند، با توجه به تساوی $x^k = ((۱ + x) - ۱)^k$، می‌بینیم که

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

این ماتریسها روش مناسبی برای تبدیل نمایش یک چندجمله‌ای نسبت به یک پایه، به نمایش آن نسبت به پایهٔ دیگر، فراهم می‌آورند. به‌عنوان یک نتیجهٔ کمکی می‌بینیم که

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۳ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۲ با استفاده از روشهای این بخش، فرمولهای متعارف دوران محورها، در هندسهٔ تحلیلی مسطحه، را به دست می‌آوریم.

گیریم

$$\mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

پایهٔ متعارف $\mathbf{R}^2$ باشد.

فرض می‌کنیم

$$\mathbf{j}_\theta=-(\sin\theta)\mathbf{i}+(\cos\theta)\mathbf{j} \text{ و } \mathbf{i}_\theta=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j}$$

بترتیب، بردارهای حاصل از دوران $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ به اندازهٔ θ درجه باشند.

می‌خواهیم رابطه‌ای بین مختصات یک نقطه نسبت پایهٔ $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ ومختصات همان نقطه نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{i}_\theta,\mathbf{j}_\theta\}$ بیابیم. توجه‌کنید که ماتریس $[\mathbf{i}_\theta,\mathbf{j}_\theta]$ عبارت‌است از:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

گیریم $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ عبارت خطی معرف بردار $\mathbf{v}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ باشد، و $\mathbf{v}=x_\theta\mathbf{i}_\theta+y_\theta\mathbf{j}_\theta$ عبارت خطی معرف بردار $\mathbf{v}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{i}_\theta,\mathbf{j}_\theta\}$. آنگاه بنابه یکی از نتایج قبلی، داریم:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_\theta\\y_\theta\end{bmatrix}$$

چون پایهٔ $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ می‌تواند از دوران پایهٔ $\{\mathbf{i}_\theta,\mathbf{j}_\theta\}$ به اندازهٔ $\theta-$ درجه حاصل شود، نتیجه می‌شود که

$$\begin{bmatrix}x_\theta\\y_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

از عبارات فوق، فرمولهای متعارف دوران‌محورها درهندسهٔ تحلیلی به‌دست می‌آیند.

از نتایج قبلی حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

(که خواننده ممکن است آن را از طرق دیگری نیز به دست آورد.)

به عنوان کاربرد دیگری از مفاهیم این بخش، داریم:

قضیهٔ ۱ گیریم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ بردارهایی در $\mathbf{R}^n$ (یا $\mathbf{C}^n$) باشند. فرض کنیم $A=[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_n]$ ماتریسی باشدکه ستون jام آن، بردار $\mathbf{x}_j$ است. دراین‌صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(۱) بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ مستقل خطی‌اند.

(۲) ماتریس A وارون پذیر است.

(۳) $\det A\neq 0$.

اثبات ازفصل سوم، می‌دانیم که (۲) و (۳) هم‌ارزند. لذا، کافی است نشان دهیم که (۱) و (۲) هم‌ارزند.

ابتدا، فرض می‌کنیم که بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ مستقل خطی باشند. طبق قضیهٔ ۲ ازبخش ۸.۴، می‌دانیم که $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای $\mathbf{R}^n$ تشکیل‌می‌دهند. بنابراین، ماتریس A نمایشگر تغییر مختصات از پایهٔ متعارف $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ به پایهٔ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ می‌باشد، و در بالا دیده‌ایم که ماتریسی از این نوع، وارون پذیر است. پس قسمت (۱)، قسمت (۲) را نتیجه می‌دهد.

سپس، فرض می‌کنیم که بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ وابستهٔ خطی باشند. در این صورت یکی از بردارها، مثلاً $\mathbf{x}_1$، ترکیبی خطی از بقیهٔ بردارهاست:

$$\mathbf{x}_1 = \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

پس

$$\det A = \det[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$$

[بنا به (D۵)]

$$= \det[\mathbf{x}_1 - \alpha_2\mathbf{x}_2 - \alpha_3\mathbf{x}_3 \cdots - \alpha_n\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$$
$$= \det[0, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$$
$$= 0$$

[بنا به (D۷)]

لذا، ماتریس A وارون پذیر نیست. از اینجا می‌بینیم که قسمت (۲)، قسمت (۱) را نتیجه می‌دهد. ●

برای آزمون این مطلب که مجموعهٔ مفروضی از بردارها یک پایه تشکیل می‌دهد یا نه، قضیهٔ فوق وسیلهٔ مناسبی است.

مثال ۳ آیا بردارهای

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تشکیل پایه‌ای برای $\mathbf{R}^4$ می‌دهند؟ بنا به قضیهٔ قبلی فقط لازم است که دترمینان زیر را حساب کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -11 & 1 \\ 4 & -3 & -24 & 4 \\ 8 & -1 & -47 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 20 & 4 \\ -8 & 15 & 41 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 15 & 41 \end{vmatrix} = 205 - 300 = -95 \neq 0$$

پس، این بردارها واقعاً تشکیل پایه می‌دهند.

مثال ۴ آیا بردارهای

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند؟ دترمینان زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۵ & -۵ \\ -۱ & ۵ & ۵ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۵ & -۵ \\ ۵ & ۵ \end{vmatrix} = ۰$$

از اینرو، این بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

درواقع، روش اثبات قضیهٔ ۱ نتیجهٔ قویتری را به دست می‌دهد.

گیریم V یک فضای برداری n بعدی باشد و $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V. فرض‌کنیم $\mathbf{x}'_۱$، $\mathbf{x}'_۲$، . . . و $\mathbf{x}'_n$، n برداردر V باشند و $\mathbf{x}'_j = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{x}_j$ نمایش $\mathbf{x}'_j$ نسبت به پایهٔ $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$ باشد.

دراین صورت احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) بردارهای $\mathbf{x}'_۱$، $\mathbf{x}'_۲$، . . .، $\mathbf{x}'_n$ مستقل خطی‌اند.

(۲)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} & \cdots & \alpha_{۱n} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} & \cdots & \alpha_{۲n} \\ & & \vdots & \\ \alpha_{n۱} & \alpha_{n۲} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$ وارون پذیر است.

(۳) $\det A \neq ۰$.

قضیهٔ ۲ گیریم

$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n &= ۰ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n &= ۰ \\ &\vdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n &= ۰ \end{aligned}$$

دستگاهی از معادلات خطی همگن n مجهولی باشد. این دستگاه دارای جوابی غیر بدیهی است، یعنی، جوابی که درآن لااقل یکی از x_iها صفر نیست، اگر وفقط اگر

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ & & \vdots & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ۰$$

اثبات فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]$ ماتریس ضرایب دستگاه باشد. در این صورت $A = [A_۱, A_۲, \ldots, A_n]$، که درآن A_j ستون jام A است. اگر $\det A = ۰$، بنا به قضیهٔ ۱، می‌دانیم‌که ستونهای‌ماتریس A وابستهٔ خطی‌اند. لذا،اسکالرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n، که لااقل یکی از آنها صفر نیست، وجود دارند به‌طوری که

$$\alpha_۱ A_۱ + \alpha_۲ A_۲ + \cdots + \alpha_n A_n = ۰.$$

اما

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ & & \vdots & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_۱ a_{۱۱} + \alpha_۲ a_{۱۲} + \cdots + \alpha_n a_{۱n} \\ \alpha_۱ a_{۲۱} + \alpha_۲ a_{۲۲} + \cdots + \alpha_n a_{۲n} \\ \vdots \\ \alpha_۱ a_{n۱} + \alpha_۲ a_{n۲} + \cdots + \alpha_n a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= [\alpha_۱ A_۱ + \alpha_۲ A_۲ + \cdots + \alpha_n A_n] = ۰$$

پس، $x_۱ = \alpha_۱$، $x_۲ = \alpha_۲$، ...، $x_n = \alpha_n$ یک جواب غیربدیهی برای دستگاه فوق می‌باشد.

ازطرف دیگر، اگر، $\det A \neq ۰$، آنگاه $A^{-۱}$ وجود دارد. بنابراین اگر $A\mathbf{X} = ۰$، آنگاه $\mathbf{X} = (A\mathbf{X})^{-۱}A = ۰$. لذا، جواب غیربدیهی وجود ندارد. ●

مثال ۵ در دستگاه

$$\begin{aligned} x + ۲y - z &= ۰ \\ x + ۳y + ۲z &= ۰ \\ x + ۵y + ۸z &= ۰ \end{aligned}$$

دترمینان ماتریس ضرایب عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ & ۸ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۹ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین، دستگاه دارای جواب غیر بدیهی است؛ برای مثال $x = -۷$، $y = ۳$، $z = -۱$.

تمرینات

۱. در هریک ازموارد زیر، مختصات بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از $\mathbf{R}^۲$ را نسبت به پایهٔ داده شده برای $\mathbf{R}^۲$ معین کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

۲. درهریک ازموارد زیر، مختصات بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ را نسبت به پایهٔ داده‌شده برای $\mathbf{R}^3$ بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳. معین کنید کدامیک از مجموعه‌های بـرداره‌ـای زیـر، در فضای بـرداری داده شده، مستقل خطی‌اند.

(الف) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

درفضای ماتریسهای 2×2.

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

در فضای ماتریسهای بالا مثلثی 2×2.

(ج) $1 + x + x^2 + x^3$، $1 - x + x^2 + x^3$، $1 + x - x^2 + x^3$، $1 + x + x^2 - x^3$ در فضای P_3.

۴. مجموعه‌های بردارهای زیر به ازای چه مقدار λ تشکیل پایه‌ای برای $\mathbf{R}^3$ می‌دهند؟

(الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$

۵. دستگاههای معادلات زیر به ازای چه مقدار حقیقی λ دارای جواب غیر بدیهی‌اند؟

(الف)
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 0 \\ x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ \lambda x + y + z &= 0 \\ \lambda^2 x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

۶. فرض کنید (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، و (x_3, y_3) مختصات سه‌نقطه درصفحه باشند. نشان دهید که این نقاط روی یک خط هستند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۷. فرض کنید (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، و (x_4, y_4) مختصات چهار نقطه در صفحه باشند. نشان دهید که این نقاط روی یک خط یا روی یک دایره قرار دارند اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۸. در فضای P_3، ماتریسهای مربوط به تغییر از پایهٔ ۱، x، x^2، x^3 به پایهٔ ۱، $(x + 1)$، $(x + 1)^2$، $(x + 1)^3$ را بیابید.

۹. اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای بـرای فضای برداری V تشکیل دهند، نشان دهید کـه مجموعه‌های بردارهای زیر نیز پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند.

(الف) $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$، . . .، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n$

(ب) $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n$، $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{x}_n$،
$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{x}_n$، . . .، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \cdots + (-\mathbf{x}_n)$

(ج) $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$، . . .، $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_n$

۱۰. نشان دهید کـه هرمجموعه از سه بـردار متمایز کـه نقاط انتهایی آنها روی سهمیی به معادلهٔ پارامتری

$$x(t) = 1 \quad y(t) = t \quad z(t) = t^2$$

قرار دارند، پایه‌ای برای $\mathbf{R}^3$ تشکیل می‌دهد.

۱۱. فرض کنید

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \text{ و } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

سه بردار در $\mathbf{R}^n$ باشند. اگر

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

نشان دهید که سه بردار مستقل خطی‌اند.

۱۲. اگر $p_۰$، $p_۱$، و $p_۲$ چند جمله‌ایهای مستقل خطی در $P_۲$ باشند و $x_۰$، $x_۱$، و $x_۲$ اعداد حقیقی متمایز، نشان دهید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} p_۰(x_۰) \\ p_۱(x_۰) \\ p_۲(x_۰) \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} p_۰(x_۱) \\ p_۱(x_۱) \\ p_۲(x_۱) \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} p_۰(x_۲) \\ p_۱(x_۲) \\ p_۲(x_۲) \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند.

۱۳. اگر $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای یک فضای برداری V باشد، نشان دهید که بردارهای $\mathbf{x} - \mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x} - \mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x} - \mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای فضای برداری V تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر $\mathbf{x}$ را نتوان به صورت

$$\mathbf{x} = \alpha_۱\mathbf{x}_۱ + \alpha_۲\mathbf{x}_۲ + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

با ضابطهٔ

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_n = ۱$$

نوشت.

۱۴. تابع f روی $\mathbf{R}^۳$ با قاعدهٔ زیر تعریف شده است: اگر $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$، آنگاه

$$f(\mathbf{v}) = x^۲ + ۲xy - ۴xz + y^۲ + z^۲$$

فرض کنید $\mathcal{B}$، پایهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ برای فضا باشدو $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \mathbf{v}$. نشان دهید که $f(\mathbf{v}) = ۲(x')^۲ - (y')^۲ + ۴(z')^۲$. (این نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک فرمول را با انتخاب مناسب مختصات، ساده کرد.)

۱۵. نشان دهید که $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$، و $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر

$$۳x + ۳y - ۳z \neq ۰.$$

۵

تبدیلات خطی

۱ تعریف تبدیلات خطی

درفصل قبلی، فضاهای برداری را مطالعه کردیم. در این فصل، تبدیلات خطی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک تبدیل خطی، در اساس، تابعی است از یک فضای برداری به فضای‌برداری دیگرکه ساختار جبری راحفظ می‌کند. درفصل‌گذشته، فضای بردارهای ستونی با تعدادمؤلفه‌های ثابت را به‌عنوان الگوی فضای برداری اختیار کردیم وآن را بیش ازهر فضای برداری دیگری به کار بردیم. در این فصل، ماتریس را به عنوان الگوی تبدیل خطی درنظر می‌گیریم. همچنین خواهیم دیدکه می‌توان، به مفهومی بسیار دقیق، هرفضای برداری را به عنوان فضای بردارهای ستونی، وهرتبدیل خطی را به عنوان ماتریس، درنظر گرفت.

تعریف فرض کنیم V و W فضاهایی برداری باشند و T تابعی از V به W با خواص زیر باشد:

(الف) به‌ازای همهٔ بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در V، $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$.
(ب) به ازای هربردار $\mathbf{x}$ در V وهر اسکالر α، $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$.

دراین صورت T را یک **تبدیل خطی** از V به W می‌نامند.

برای نمایش یک تبدیل خطی T از فضای برداری V به فضای برداری W اغلب می‌نویسیم $T : V \rightarrow W$.

مثال ۱ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ با درایه های حقیقی باشد. تابع T_A از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، درنظر می‌گیریم

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},$$

که درآن $\mathbf{x}$ یک n-بردار است.

اگر $\mathbf{x}$ یک n-بردار باشد، مطمئناً حاصلضرب $A\mathbf{x}$ تعریف شده است و یک m-بردار می‌باشد. پس T_A تابعی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ تعریف می‌کند.

برای اینکه ثابت کنیم T_A خطی است، ملاحظه می‌کنیم که اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به $\mathbf{R}^n$ باشند و α یک اسکالر باشد، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} T_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) && (\text{بنا به تعریف } T_A) \\ &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} && (\text{بنا به قانون توزیعپذیری ضرب ماتریسها}) \\ &= T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y}) && (\text{طبق تعریف } T_A) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T_A(\alpha\mathbf{x}) &= A(\alpha\mathbf{x}) \\ &= \alpha A\mathbf{x} \\ &= \alpha T_A(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

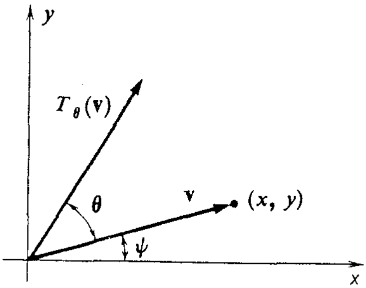
برای مثال، تابع T، از $\mathbf{R}^۳$ به $\mathbf{R}^۲$، که به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ y+z \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، خطی است.

مثال ۲ اگر A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های مختلط باشد، تابع T_A که به ازای هر $\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$ به صورت $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود، یک تبدیل خطی از $\mathbf{C}^n$ به $\mathbf{C}^m$ تعریف می‌کند.

مثال ۳ فرض کنیم T_θ تابعی از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر $\mathbf{v}$ برداری درصفحه باشد، $T_\theta(\mathbf{v})$ از دوران $\mathbf{v}$ به اندازهٔ θ درجه درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، حاصل می‌شود (ر. ک. شکل ۱۰۵).



شکل ۱۰۵

فرض کنیم r طول بردار $\mathbf{v}$، و ψ زاویه‌ای باشد که بردار $\mathbf{v}$ با محور xها می‌سازد. اگر انتهای بردار $\mathbf{v}$ در نقطهٔ (x, y) ازصفحه واقع باشد، داریم $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. با استفاده از قواعد مثلثات، نتیجه می‌شود که $x = r\cos\psi$ و $y = r\sin\psi$. لذا $\mathbf{v} = (r\cos\psi)\mathbf{i} + (r\sin\psi)\mathbf{j}$.

چون بردار $T_\theta(\mathbf{v})$ از دوران $\mathbf{v}$ به اندازهٔ θ درجه حاصل می‌شود، طول $T_\theta(\mathbf{v})$ همان طول $\mathbf{v}$ است، یعنی مساوی است با r، و زاویهٔ بین $T_\theta(\mathbf{v})$ و محور xها، $\theta + \psi$ درجه است. از اینرو،

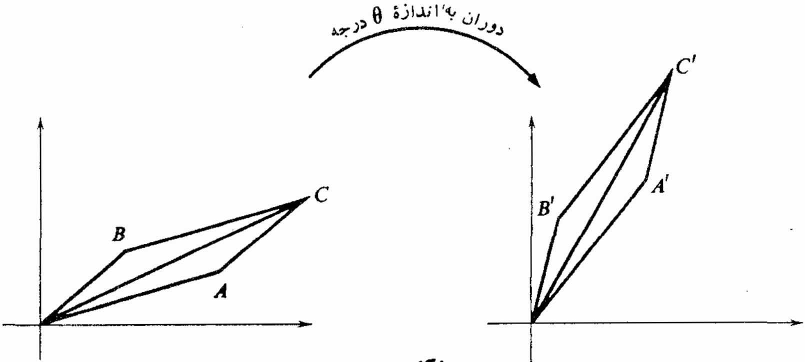
$$\begin{aligned} T_\theta(\mathbf{v}) &= (r\cos(\theta+\psi))\mathbf{i} + (r\sin(\theta+\psi))\mathbf{j} \\ &= (r\cos\theta\cos\psi - r\sin\theta\sin\psi)\mathbf{i} \\ &\quad + (r\cos\theta\sin\psi + r\sin\theta\cos\psi)\mathbf{j} \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta)\mathbf{i} + (y\cos\theta + x\sin\theta)\mathbf{j} \end{aligned}$$

که برحسب ماتریسها و بردارهای ستونی چنین می‌شود:

$$T_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

از مثال ۱ چنین برمی‌آید که T_θ تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^2$ به خودش است.

دراین مثال، جهت به دست‌آوردن عبارتی جبری برای T_θ، ازهندسه استفاده کردیم. سپس با انجام عملیات روی این عبارت جبری، نشان دادیم که T_θ خطی است. لکن، با روش هندسی محض نیز می‌توانیم خطی بودن T_θ را ثابت کنیم.



شکل ۲.۵

برای مثال، نشان می‌دهیم که $T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$. در شکل ۲.۵، فرض کنیم $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی باشند که انتهای آنها بترتیب A و B است. در این صورت، انتهای $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ نقطهٔ C است. همچنین انتهای $T_\theta(\mathbf{u})$، $T_\theta(\mathbf{v})$، و $T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ بترتیب در A'، B'، و C' واقع است. نکتهٔ مهم آن است که، چون T_θ یک دوران است و $OABC$ یک متوازی‌الاضلاع، $OA'B'C'$ نیزیک متوازی‌الاضلاع می‌باشد. پس، بنا به جمع برداری نتیجه می‌شود که $T_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_\theta(\mathbf{u}) + T_\theta(\mathbf{v})$. همین طور، می‌توان

نشان داد که $T_\theta(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T_\theta(\mathbf{u})$.

مثال ۴ سه شرکت L، M، و N که بازار را به‌طور کامل در دست دارند محصول خاصی را تولید می‌کنند. درطی یک‌سال، هرشرکت درصد معینی ازمشتریهای خود را حفظ می‌کند و درصد دیگری از آنها به شرکتهای رقیب روی می‌آورند. میزان حفظ و از دست دادن مشتریها را با ماتریس

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} L & M & N \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} L \\ M \\ N \end{array} \end{array}$$

نشان می‌دهیم. اگر ستون اول را از بالا به پایین بخوانیم، می‌بینیم که ۱/۲ از مشتریان L خریدار این شرکت می‌مانند و ۱/۴ آنها به M و ۱/۴ باقیمانده به N روی می‌آورند.

دو ستون دیگر را نیز به‌همین ترتیب می‌توان تفسیر کرد. حال بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ راچنین تعریف می‌کنیم که x کسری از بازار است که در زمانی بخصوص در دست L است، y کسرمربوط به M، و z کسر مربوط به N می‌باشد. گوییم‌که $\mathbf{v}$ نمایشگر وضع بازار است. فرض می‌کنیم $T(\mathbf{v})$ وضع بازار پس از یک سال باشد. در این صورت $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. برای مثال، پس از انقضای یک سال، سهم M را از بازار بررسی می‌کنیم. پس از این مدت، ۱/۴ از مشتریان شرکت L جذب شرکت M شده‌اند و از این منبع، $x/۴$ از بازار به دست شرکت M می‌افتد. همچنین شرکت M نصف مشتریان خود را حفظ می‌کند که $y/۲$ بازار را شامل می‌شود. از N نیز $z/۶$ از بازار نصیب شرکت M می‌شود. لذا، روی‌هم رفته بعد ازیک سال، سهم M از بازار $x/۴ + y/۲ + z/۶$ است. البته، این عبارت دومین مؤلفهٔ بردار $A\mathbf{v}$ است.

دراین حالت، کاملاً طبیعی است که T را به‌عنوان تابعی درنظر گیریم که با فرمول $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ روی تمامی $\mathbf{R}^۳$ تعریف شده است. مثال ۱ فوق نشان می‌دهد که T تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^۳$ به خودش است. در این مثال، T وضع بازار را در یک سال معین، به‌وضع بازار درسال بعد ازآن تبدیل می‌کند.

ماتریس A، مثال خاصی از ماتریس تصادفی است. ماتریس تصادفی، ماتریسی است که همهٔ درایه‌هایش غیرمنفی و حاصلجمع درایه‌های هرستونش برابر ۱ باشد. قبلاً در این کتاب، نمونه‌های زیادی ازاین قبیل ماتریسها را دیدیم. درمثال ۲، ازبخش ۴.۲، ماتریسهای $A_۱$، $A_۲$، $A_۱A_۲$، و $A_۲A_۱$ همگی ماتریسهای تصادفی هستند. این قبیل ماتریسها درمطالعهٔ فرایندهای مارکوف، که هم این مثال و هم مثال بخش ۴.۲ نمونه‌هایی ازآن هستند، اهمیت

زیادی دارند. در مطالعهٔ این فرایندها که با ماتریسهای تصادفی سروکار دارند، نظریهٔ تبدیلات خطی خیلی مفید است.

این گونه مثالها غالباً در مدلهای ریاضی معمول در علوم رفتاری و علوم اجتماعی پیش می‌آیند.

در تمام مثالهای فوق، برای تعریف تبدیلات خطی از ماتریسها استفاده شد، ولی همان طور که در مثال زیر خواهیم دید، لزومی ندارد که همیشه چنین باشد.

مثال ۵ فرض کنیم M_{mn} و M_{nm} بترتیب نشانگر فضای ماتریسهای $m \times n$ و $n \times m$ با درایه‌های حقیقی باشند. تابع T از M_{mn} به M_{nm} را که به ازای هر ماتریس $m \times n$ به صورت $T(A) = A^T$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم.

چون ترانهاد یک ماتریس $m \times n$، ماتریسی $n \times m$ است، T تابعی خوش‌تعریف از M_{mn} به M_{nm} است. اگر A و B ماتریسهایی $m \times n$ باشند و α یک اسکالر باشد،

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (A+B)^T && \text{(بنا به تعریف } T\text{)} \\ &= A^T + B^T && \text{(بخش ۷.۲)} \\ &= T(A) + T(B) && \text{(طبق تعریف } T\text{)} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= (\alpha A)^T && \text{(بنا به تعریف } T\text{)} \\ &= \alpha A^T && \text{(بخش ۷.۲)} \\ &= \alpha T(A) && \text{(طبق تعریف } T\text{)} \end{aligned}$$

در نتیجه T تبدیلی خطی است.

مثال ۶ فرض کنیم D تابعی از P_n به P_n باشد که به صورت $D(f) = f'$ (f' مشتق f است) تعریف می‌شود. چون مشتق یک چند جمله‌ای با درجهٔ نابیشتر از n، یک چند‌جمله‌ای با درجهٔ نابیشتر از n است، D تابعی خوش تعریف از P_n به P_n است.

برای اثبات خطی بودن D، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' && \text{(بنا به تعریف } D\text{)} \\ &= f' + g' && \text{(طبق قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال)} \\ &= D(f) + D(g) && \text{(بنا به تعریف } D\text{)} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} D(\alpha f) &= (\alpha f)' && \text{(بنا به تعریف } D\text{)} \\ &= \alpha f' && \text{(طبق قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال)} \\ &= \alpha D(f) && \text{(بنا به تعریف } D\text{)} \end{aligned}$$

اگر $\mathbf{x}$ برداری در فضای برداری V باشد و T تبدیلی خطی از V به فضای برداری W، و اگر $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$، گوییم که بردار $\mathbf{y}$ **نگارهٔ** بردار $\mathbf{x}$ تحت تبدیل T است. همچنین

می‌توان گفت که تحت تبدیل T، $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ می‌رود، یا $\mathbf{x}$ توسط T به $\mathbf{y}$ فرستاده می‌شود. لذا، مثلاً، نگارهٔ $۳x^۲ + x + ۱$ تحت عملگر مشتقگیری مثال ۴، برابر $۶x + ۱$ است.

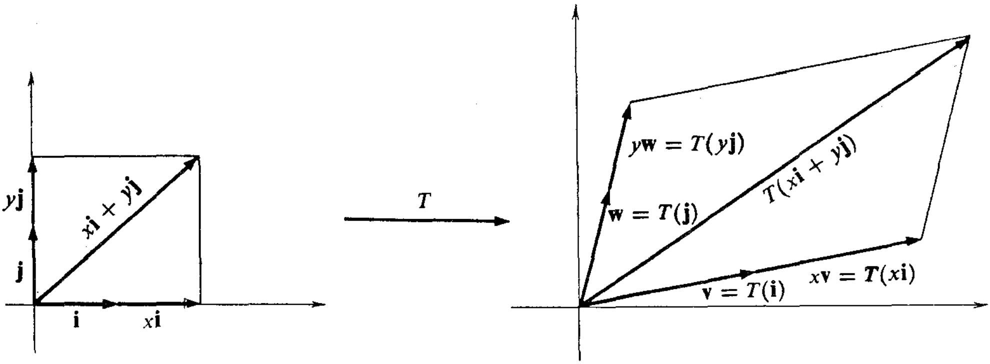
در بسیاری از موارد، تبدیل خطی از یک فضای برداری به خودش را **عملگرخطی** می‌نامند.

اگر T عملگری خطی روی $\mathbf{R}^۲$ باشد و اگر نگارهٔ بردارهای پایهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ تحت تبدیل T معلوم باشد، می‌توان نگارهٔ یک بردار دلخواه از $\mathbf{R}^۲$ را معین کرد. فرض می‌کنیم $T(\mathbf{i}) = \mathbf{v}$ و $T(\mathbf{j}) = \mathbf{w}$. در این صورت،

$$T(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = T(x\mathbf{i}) + T(y\mathbf{j}) = xT(\mathbf{i}) + yT(\mathbf{j}) = x\mathbf{v} + y\mathbf{w}.$$

پس، می‌توان نگارهٔ $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ را با استفاده از $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ حساب کرد. این مطلب درشکل ۳.۵ نشان داده شده است.

در واقع، بررسیهای مشابهی نشان می‌دهد که نگاره‌های دو بردار مستقل خطی تحت T، نگاره‌های تمام بردارهای $\mathbf{R}^۲$ را معین می‌کنند. این مطلب در بعضی ازکاربردها ممکن است مفید باشد.



شکل ۳.۵

مثال ۷. یک مؤسسهٔ انرژی، زغال سنگ و گاز طبیعی تولید می‌کند. کسر معینی از زغال سنگی که مؤسسه استخراج می‌کند در خود مؤسسه برای تولید زغال سنگ و گاز طبیعی بیشتر مصرف می‌شود. همین‌طور، مقداری از گاز نیز به مصرف داخلی مؤسسه می‌رسد.

مقدار زغال سنگ استخراج شده وگاز به دست‌آمده در یک هفته را با بردار $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. دراینجا u مقدارزغال سنگی است‌که دریک هفته‌استخراج می‌شود و v مقدار گازبه‌دست آمده در یک هفته است. این بردار را مقدار تولید ناخالص می‌نامیم.

مقدار زغال سنگ و گاز موجود در یک هفته برای فروش، تابعی است از مقدار تولید ناخالص درآن هفته. بنابراین، هرگاه مقدار تولید ناخالص با بردار $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ داده شده

باشد، چنین تعریف می‌کنیم: $T\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$، که در آن s و t به‌ترتیب مقادیر زغال سنگ و گاز طبیعی است که مؤسسه برای فروش تولید می‌کند. بردار $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ را مقدار تولید خالص می‌نامیم. در این حالت T تابعی است که مقدار تولید ناخالص را به مقدار تولید خالص تبدیل می‌کند.

احساس شهودی ما ممکن است باعث این فکر شود که T خطی است. برای مثال، قابل قبول به نظر می‌رسد که وقتی مقدار تولید ناخالص دو برابر شود، مقدار تولیدخالص نیز دوبرابر گردد. در هرحال، در بسیاری از الگوهای ریاضی دستگاههای اقتصادی، فرض بر این است. بنابراین، فرض می‌کنیم T خطی است.

گیریم که مقدار تولید ناخالص و خالص در یک هفته، بترتیب $\begin{bmatrix} ۱۶۰۰ \\ ۱۲۰۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۹۰۰ \\ ۷۰۰ \end{bmatrix}$، و در هفتهٔ دیگر، $\begin{bmatrix} ۲۴۰۰ \\ ۲۰۰۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱۳۰۰ \\ ۱۲۰۰ \end{bmatrix}$ باشند. اگر در هفته‌ای مقدار تولید ناخالص $\begin{bmatrix} ۲۰۰۰ \\ ۱۶۰۰ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار تولید خالص چقدر است؟

با ملاحظهٔ اینکه $\begin{bmatrix} ۲۰۰۰ \\ ۱۶۰۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲۴۰۰ \\ ۲۰۰۰ \end{bmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱۶۰۰ \\ ۱۲۰۰ \end{bmatrix}$ و با استفاده از خطی بودن T، داریم $T\left(\begin{bmatrix} ۲۰۰۰ \\ ۱۶۰۰ \end{bmatrix}\right) = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱۳۰۰ \\ ۱۲۰۰ \end{bmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۹۰۰ \\ ۷۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱۰۰ \\ ۹۵۰ \end{bmatrix}$.

این یک‌مثال ساده‌از الگوی ورودی ــ خروجی لئونتیف است که در مطالعهٔ دستگاههای اقتصادی به کار می‌رود.

به عنوان مثالی از ماهیت هندسی تبدیلات‌خطی، نشان می‌دهیم که یک عملگر خطی روی $\mathbf{R}^۳$، خطوط را به نقاط ویا به‌خطوط می برد.

برای ملاحظهٔ این مطلب، گیریم $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ معادلهٔ پارامتری یک خط باشد، که در آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهایی در $\mathbf{R}^۳$ هستند و t یک پارامتر حقیقی است. اگر T عملگری خطی روی $\mathbf{R}^۳$ باشد، نگارهٔ $\mathbf{r}(t)$ عبارت است از $\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{r}(t))$. چون T خطی است، داریم:

$$\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{r}(t)) = T(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(t\mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + tT(\mathbf{b})$$

حال، ملاحظه می‌کنیم‌که اگر $T(\mathbf{b}) \neq ۰$، $\mathbf{s}(t)$ معادلهٔ خطی است که از نقطهٔ $T(\mathbf{a})$ در امتداد بردار $T(\mathbf{b})$ می‌گذرد. اگر $T(\mathbf{b}) = ۰$، $\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{a})$ مقدارثابتی است. لذا، $\mathbf{r}(t)$ توسط T به یک نقطه برده می‌شود.

مطلب زیر نشان می‌دهد که هر دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. عملگر خطیی را که به صورت $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix}$ روی $\mathbf{R}^۲$ تعریف‌می‌شود، درنظر می‌گیریم.

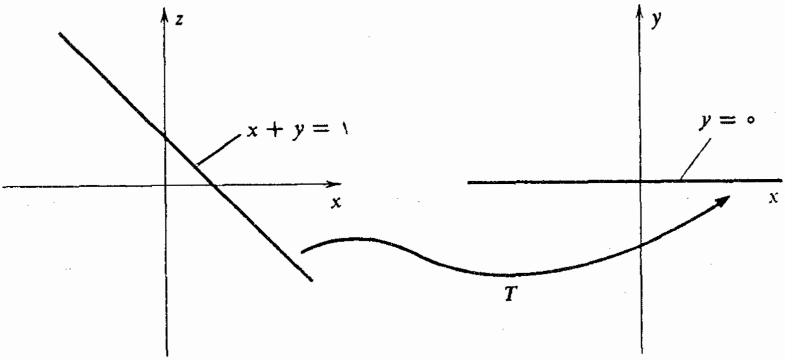
صورت پارامتری خط $x + y = ۱$ عبارت است از:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (۱ - t)\mathbf{j}$$

نگارهٔ آن عبارت است از:

$$\mathbf{s}(t) = T(t\mathbf{i} + (۱ - t)\mathbf{j}) = t\mathbf{i}$$

که صورت پارامتری خط $y = ۰$ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۴.۵)



شکل ۴.۵

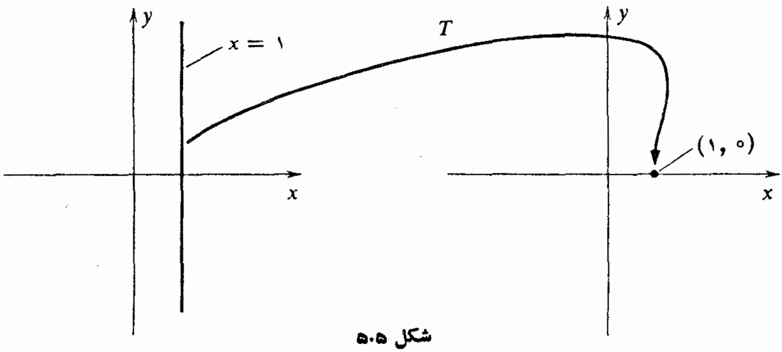
از طرف دیگر، صورت پارامتری خط $x = ۱$ عبارت است از:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$$

که به

$$\mathbf{s}(t) = T(\mathbf{r}(t)) = T(\mathbf{i} + t\mathbf{j}) = \mathbf{i}$$

که نقطهٔ $(۱, ۰)$ است، برده می‌شود. (ر. ک. شکل ۵.۵)



شکل ۵.۵

خواننده می‌تواند تحقیق کند که تبدیل خطی T، هر خط موازی با محور yها را به یک نقطه می‌برد، حال آنکه همهٔ خطوط دیگر تحت T به خط $y = ۰$ برده می‌شوند.

تمرینات

۱. معین کنید کدامیک از توابع زیر که از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ تعریف شده‌اند، خطی است.

(الف) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ (ب) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \end{bmatrix}$

(ج) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix}$ (د) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$

(ه) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y \end{bmatrix}$ (و) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ (x^2+y^2)^{1/2} \end{bmatrix}$

۲. فرض کنید T تابعی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ باشد که هر نقطه را به قرینهٔ آن نسبت به محور xها می‌برد. نشان دهید که T خطی است و $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$.

۳. نشان دهید توابع زیر، که از $\mathbf{R}^3$ به $\mathbf{R}^3$ تعریف شده‌اند، خطی هستند.

(الف)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ x+y \\ 2x+y+z \end{bmatrix}$$

(ب)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}$$

۴. فرض کنید R_θ تابعی باشد که به هر بردار $\mathbf{v}$ برداری مانند $R_\theta(\mathbf{v})$ نسبت می‌دهد که از دوران بردار $\mathbf{v}$ به‌اندازهٔ θ درجه حول محور zها حاصل می‌شود. در طی دوران، نقطهٔ انتهایی $\mathbf{v}$ در صفحه‌ای عمود بر محور zها باقی می‌ماند.

(الف) نشان دهید که R_θ خطی است و

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(ب) اگر در مطالب فوق محور yها را جایگزین محور zها کنیم، نشان دهید که

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

۵. در مثال ۷ متن کتاب، فرض کنید $\mathbf{v}$ بردار مقدارتولید ناخالص باشد. یک ماتریس A بیابید به طوری که $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

۶. در مثال ۷ متن کتاب، فرض کنید $\mathbf{v}$ بردار مقدار تولید ناخالص باشد. نشان دهید که $\mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ مقدار مصرف داخلی زغال سنگ و گاز را به عنوان تابعی از $\mathbf{v}$، می‌دهد. نشان

دهید که نگاشت $S(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - T(\mathbf{v})$ خطی است.

۰۷ دو لولهٔ آزمایش محتوی آب را روی میزی قرار داده‌ایم. مقدار آب در دو لوله با بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان داده شده است، که در آن x مقدار آب در لولهٔ اول و y مقدار آب در لولهٔ دوم است. عملی دومرحله‌ای روی لوله‌ها انجام می‌شود:

(۱) $\frac{۲}{۳}$ محتوای لولهٔ اول در لولهٔ دوم ریخته می‌شود.

(۲) سپس $\frac{۱}{۲}$ محتوای لولهٔ دوم در لولهٔ اول ریخته می‌شود.

فرض کنید $T(\mathbf{v})$ برداری باشد که مقدار آب در دو لوله را پس از انجام هر دو مرحله نشان می‌دهد.

(الف) ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

(ب) نشان دهید که T خطی است.

۰۸ فرض کنید T عملگری خطی روی $\mathbf{R}^۲$ باشد به نحوی که $T(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \mathbf{j}$ و $T(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \mathbf{i}+\mathbf{j}$. بردارهای $T(\mathbf{i})$ و $T(\mathbf{j})$ را بیابید.

۰۹ دو نفر در مورد طرح زیر برای تعدیل درآمد خود توافق می‌کنند. فرد اولی نصف پولش را به دومی می‌دهد و دومی $\frac{۱}{۳}$ پول خود را به اولی تسلیم می‌کند. فرض کنید $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ برداری باشد که مؤلفه‌های x و y آن، بترتیب مقدار پول فرد اول و مقدار پول فرد دوم، قبل از انجام طرح هستند. فرض کنید $T(\mathbf{v})$ برداری باشد که مقدار پول هر کدام را بعد از اجرای طرح نشان می‌دهد. ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

۰۱۰ اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، تابع T از M_{np} به M_{mp} را که به صورت زیر تعریف شده است، در نظر بگیرید:

$$T(B) = AB, \quad B \in M_{np}$$

نشان دهید که T خطی است.

۰۱۱ تابعی مانند T از $\mathbf{R}^۳$ به $\mathbf{R}^۳$ مثال بزنید که به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^۳$ و هر اسکالر α، در $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$ صدق کند ولی خطی نباشد.

۰۱۲ اگر B ماتریس $n \times n$ وارون پذیری باشد، نشان دهیدکه تابع T از M_{nn} به M_{nn} که به صورت $T(A) = BAB^{-1}$ تعریف می‌شود، یک تبدیل خطی است.

۰۱۳ اگر B ماتریس ثابت $n \times n$ای باشد، نشان دهید توابع زیر که از M_{nn} بـه M_{nn}

تعریف می‌شوند، خطی‌اند.

(الف) $T(A) = AB - BA$ (ب) $T(A) = AB + BA$

(ج) $T(A) = AB - B^{۲}A$

۱۴. اگر V فضایی برداری و α یک اسکالر ثابت باشد، نشان‌دهید که تابع $T:V \to V$ که به‌صورت $T(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ تعریف می‌شود، خطی‌است. اگر $V = \mathbf{R}^{۲}$، این تابع را به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۵. فرض کنید V فضایی برداری‌باشدو $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V. در این‌صورت اگر $\mathbf{x}$ برداری در V باشد، اسکالرهای یکتای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، . . .، α_n وجود دارند به‌طوری که $\mathbf{x} = \alpha_۱\mathbf{x}_۱ + \alpha_۲\mathbf{x}_۲ + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. تابع $f(\mathbf{x}) = \alpha_۱$ را در نظر بگیرید، که در آن، $\alpha_۱$ مختص اول $\mathbf{x}$ نسبت به‌پایهٔ $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$ است. نشان دهید که f خطی است.

۱۶. فرض کنید $f:V \to \mathbf{R}$ و $g:V \to \mathbf{R}$ دو تبدیل خطی ازفضای برداری V به $\mathbf{R}$ باشند. نشان دهید که

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

تبدیلی خطی از V به $\mathbf{R}^{۲}$ است. این مطلب را درمورد n تابع تعمیم‌دهید.

۱۷. فرض کنید P_n فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x، از درجهٔ نابیشتر از n، و با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید توابع زیر که از P_n به P_n تعریف می‌شوند، تبدیلاتی خطی‌اند.

(الف) $(T(f))(x) = f(x + \alpha)$، که در آن α عدد حقیقی ثابتی است. به عبارت دیگر، T، $f(x)$ را به $f(x + \alpha)$ می‌برد.

(ب) $T(f) = a_۰ f + (b_۰ + b_۱ x)f' + (c_۰ + c_۱ x + c_۲ x^{۲})f''$، که‌در آن f' و f'' بترتیب مشتقات اول و دوم f هستند و $a_۰$، $b_۰$، $b_۱$، $c_۰$، $c_۱$، و $c_۲$ اعداد حقیقی‌اند.

(ج) $(T(f))(x) = \int_۰^x t f''(t)dt$.

(د) $(T(f))(x) = f(\alpha x)$، α عددی حقیقی است.

(ه) $T(f) = f(\alpha)$، α عددی حقیقی است.

۱۸. آیا تابع $f(A) = \det A$ از M_{nn} به اعداد حقیقی، تبدیلی‌خطی است؟

۱۹. فرض کنید $T:M_{۳۳} \to M_{۲۲}$، تابع

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید که T خطی است.

۲۰. فرض‌کنید P فضای تمام چندجمله‌ایهای یک متغیره بامتغیر x وبا ضرایب‌حقیقی باشد. نشان دهید که توابع S و T از P به P که به صورت

$$(T(f))(x) = \int_{\circ}^{x} f(t)dt \quad \text{و} \quad S(f) = xf$$

تعریف می‌شوند، تبدیلاتی خطی از P به P هستند.

۲۱. فرض کنید T تابعی از فضای برداری حقیقی V به V باشد به نحوی که

(۱) $T(x + y) = T(x) + T(y)$

(۲) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ ،$\alpha \geqslant \circ$ به ازای

نشان دهید که T تبدیلی خطی است.

۲ خواص دیگری از تبدیلات خطی

در این بخش، توجه خود را به خواص مهم دیگری از تبدیلات خطی معطوف می‌کنیم.

گزاره فرض کنیم V و W فضاهایی برداری باشند، و $T: V \to W$ تبدیلی خطی باشد. در این صورت

(الف) $T(\circ) = \circ$

(ب) $T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \beta T(\mathbf{y})$

(ج) $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathbf{x}_i)$

اثبات (الف) $T(\circ) = T(\circ \cdot \mathbf{x}) = \circ \cdot T(\mathbf{x}) = \circ$

(ب) $T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = T(\alpha\mathbf{x}) + T(\beta\mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \beta T(\mathbf{y})$

(ج) این قسمت را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$، بنا به شرط(ب) از تعریف تبدیل خطی، واضح است که (ج) برقرار است.

اگر $n > 1$، داریم

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) &= T\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{x}_i + \alpha_n \mathbf{x}_n\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) + T(\alpha_n \mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

بنا به فرض استقرا $T\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T(\mathbf{x}_i)$

پس،

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i T(\mathbf{x}_i) + \alpha_n T(\mathbf{x}_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

●

برای هر فضای برداری V، دو تبدیل خطی مهم می‌توان تعریف کرد. اولی تابع N است که روی V، به ازای هر $\mathbf{x}\in V$، به صورت $N(\mathbf{x}) = 0$ تعریف می‌شود. چون $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$ و $N(\mathbf{x}) = N(\mathbf{y}) = 0$، می‌بینیم که $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$. همچنین از آنجا که $N(\alpha\mathbf{x}) = 0$ و $N(\mathbf{x}) = 0$، در نتیجه $N(\alpha\mathbf{x}) = \alpha N(\mathbf{x})$. از اینرو، N خطی است. مناسب است که N را **تبدیل صفر** بنامیم.

تبدیل خطی دیگری که در هر فضای برداری V تعریف می‌شود، تابع I_V است که به ازای هر $\mathbf{x}\in V$ به‌صورت $I_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ تعریف می‌شود. I_V خطی است، زیرا طبق تعریف، $I_V(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}$، $I_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$، و $I_V(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. لذا $I_V(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = I_V(\mathbf{x}) + I_V(\mathbf{y})$. همچنین $I_V(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x} = \alpha I_V(\mathbf{x})$. I_V را **تبدیل همانی** روی فضای برداری V می‌نامند. هرگاه فضای برداری V از فحوای مطلب معلوم باشد، معمولاً I_V را فقط با I نشان می‌دهیم.

فرض کنیم T_1 و T_2 دو تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشند. T_1 و T_2 در چه صورتی مساوی‌اند؟ گوییم T_1 و T_2 مساوی‌اند اگر و فقط اگر به عنوان دو تابع مساوی باشند. به عبارت دیگر T_1 و T_2 مساوی‌اند اگر و فقط اگر به ازای هر بردار $\mathbf{x}\in V$، داشته باشیم: $T_1(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x})$. اگر T_1 و T_2 مساوی باشند، می‌نویسیم $T_1 = T_2$.

روشی کلی برای ساختن تبدیلات خطی در قضیهٔ زیر ارائه شده است:

قضیهٔ ۱ فرض کنیم V فضایی برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V. گیریم W فضای برداری دیگری باشد و $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$، n بردار دلخواه در W باشند. در این صورت یک و فقط یک تبدیل خطی T از V به W وجود دارد به نحوی که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$.

اثبات ابتدا، نشان می‌دهیم که چنین تبدیل خطیی وجود دارد.

چون $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه است، اگر $\mathbf{x}$ برداری در V باشد، اسکالرهای یکتای α_1، α_2، ...، α_n وجود دارند به طوری که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. حال $T(\mathbf{x})$ را به صورت $T(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n$ تعریف می‌کنیم. چون اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n به طور یکتا توسط $\mathbf{x}$ معین می‌گردند، تابع T خوش‌تعریف است.

ثابت می‌کنیم که T خطی است. فرض می‌کنیم $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردار در V باشند. در این صورت به‌ازای اسکالرهای مناسب α_1، α_2، ...، α_n و β_1، β_2، ...، β_n، داریم:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

و

$$\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{x}_n$$

بنابراین $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{x}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{x}_n$. بنا

به تعریف T، داریم:

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n$$
$$T(\mathbf{y}) = \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{y}_n$$

و

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{y}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{y}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{y}_n$$

لذا،

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

اگر $\mathbf{x}$ متعلق به V و α یک اسکالر باشد، به ازای اسکالرهای مناسب α_1، α_2، ...، α_n داریم $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. پس

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha\alpha_1)\mathbf{x}_1 + (\alpha\alpha_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{x}_n.$$

از اینرو، بنا به تعریف T،

$$T(\mathbf{x}) = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n$$
$$T(\alpha\mathbf{x}) = (\alpha\alpha_1)\mathbf{y}_1 + (\alpha\alpha_2)\mathbf{y}_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\mathbf{y}_n$$

از این قرار $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که T خطی است. طبق تعریف T، داریم: $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$، و بدین ترتیب نیمهٔ اول قضیه ثابت شده است.

نیمهٔ دوم قضیه می‌گوید که فقط یک تبدیل خطی وجود دارد به طوری که

$$T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1\text{، } T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2\text{، } \ldots\text{، } T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n.$$

برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم S و T دو عملگر خطی باشند به‌نحوی که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، داشته باشیم $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ و $S(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$. می‌خواهیم نشان دهیم که $S = T$. یعنی به ازای هر $\mathbf{x} \in V$، $T(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$.

اگر $\mathbf{x}$ متعلق به V باشد، اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n وجود دارند به طوری که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. پس

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= \alpha_1 S(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 S(\mathbf{x}_2) + \cdots + \alpha_n S(\mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n \end{aligned}$$

از اینرو، $T(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$. چون $\mathbf{x}$ برداری دلخواه بود، نتیجه می‌شود که $T = S$. ●

توجه کنید که قضیه‌دارای دو قسمت است. قسمت اول، با تبدیل مناسبی از بردارهای پایه، که در نتیجه نگارهٔ بقیهٔ بردارها با استفاده از خطی بودن به دست می‌آیند، ما را قادر

به ساختن تبدیلات خطی مـی‌سازد. برای مثال، تبدیل خطی صفر را می‌تـوان با انتخـاب $\mathbf{y}_1 = 0$، $\mathbf{y}_2 = 0$، ...، $\mathbf{y}_n = 0$ ساخت. تبدیل همانی را بـا انتخـاب $W = V$ و $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$، $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n$ می‌توان ساخت. همچنین می‌توان یک تبدیل خطی T روی P_3 ساخت به نحوی که

$$1 \to 0 \text{،} \quad x \to 1 \text{،} \quad x^2 \to 2x \text{،} \quad x^3 \to 3x^2 \text{.}$$

عملگر خطی حاصل، همان عملگر مشتقگیری مثال ۶ از بخش ۱.۵ است.

نیمهٔ دوم قضیه دارای صورتبندی دیگری است. اگر T و S دو تبدیل خطی از فضای برداری V به فضای برداری دیگر W باشند و اثر آنها روی بردارهای یک پـایهٔ V یکی باشد، آنگاه اثر T و S روی تمامی V یکی است. این گزاره، مطلبی را که در بخش قبلی ثابت کردیم به فضاهای برداری متناهی‌البعد دلخواه تعمیم می‌دهد. در آنجا، دیدیم که یک تبدیل خطی از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ توسط نگاره‌های بردارهای پایهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ کاملاً معین می‌شود.

حال وقت آن است که با تعمیم نتیجه‌ای از بخش قبلی، نشان دهیم هر تبدیل خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ را می‌توان از ضرب بردارهای $\mathbf{R}^n$ در ماتریس مناسبی به دست آورد.

قضیهٔ ۲ فرض‌کنیم $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد. دراین صورت ماتریس $m \times n$ای مانند A با درایه‌های حقیقی وجود دارد به طوری که به ازای هر $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$، $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

اثبات فـرض کنیم $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ پـایهٔ متعارف $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{e}'_1$، $\mathbf{e}'_2$، ...، $\mathbf{e}'_m$ پـایـهٔ متعارف $\mathbf{R}^m$ باشد.

چون $\mathbf{e}'_1$، $\mathbf{e}'_2$، ...، $\mathbf{e}'_m$ پـایه‌ای برای $\mathbf{R}^m$ است، اسکالرهـای a_{ij} وجـود دارنـد به‌طوری که $T(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{e}'_i$. اگر $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j$ برداری در $\mathbf{R}^n$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T(\mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{e}'_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}x_j\mathbf{e}'_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\mathbf{e}'_i \ . \end{aligned}$$

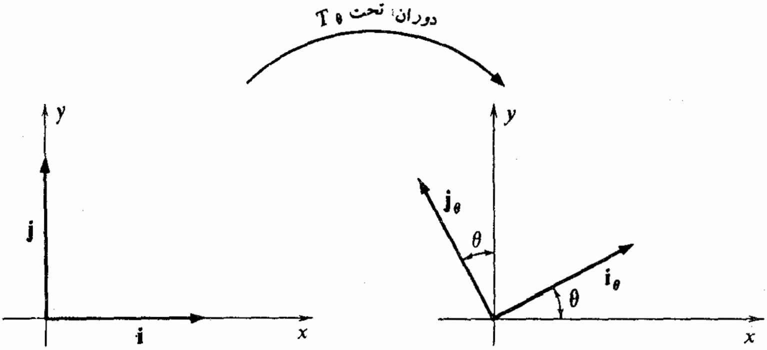
از اینرو، مؤلفهٔ iام بردار $T(\mathbf{x})$ دقیقاً برابر $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ است.

اگر فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$، آنگاه مؤلفهٔ iام حـاصل ضرب $A\mathbf{x}$ دقیقـاً عبارت است از $\sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{x}_j$.

از این قرار مؤلفه‌های iام $(i = 1, 2, \dots, m)$ بردارهای $A\mathbf{x}$ و $T(\mathbf{x})$ یکسان‌اند، و بنابراین $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. پس تبدیل خطی T دقیقاً از ضرب بـردارهای $\mathbf{R}^n$ در مـاتریس A، القا شده است. ●

اگر A ماتریس $m\times n$ای باشد، غالباً تبدیل خطیی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ را که توسط A القا می‌شود با T_A نشان می‌دهیم. توجه به این نکته مهم است که ستون jام ماتریس A، بردار $T(\mathbf{e}_j)$ است. لذا، اگر T عملگری خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ باشد، برای محاسبهٔ ماتریس وابسته به آن، فقط بـه محاسبهٔ نگارهٔ بردارهای پایهٔ $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ و تشکیل ماتریس $A=[T(\mathbf{e}_1),T(\mathbf{e}_2),\ldots,T(\mathbf{e}_n)]$ احتیاج داریم. همچنین واضح است کـه ماتریس A به طور یکتا، توسط نگارهٔ بردارهای پایهٔ $\mathbf{e}_1$،$\mathbf{e}_2$،...،$\mathbf{e}_n$ تحت T، معین می‌گردد.

به عنوان مثال، تبدیل خطی T_θ را به یاد آورید که بردارهای صفحه را به اندازهٔ θ درجه دوران می‌دهد . (ر. ک. شکل ۶.۵)



شکل ۶.۵

چون

$$\mathbf{i}_\theta = T_\theta(\mathbf{i}) = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}_\theta = T_\theta(\mathbf{j}) = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$$

می‌بینیم که ماتریس وابسته به T_θ عبارت است از:

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

این فرمول از نوشتن بردار $\mathbf{i}_\theta$ در ستون اول و بـردار $\mathbf{j}_\theta$ در ستون دوم ماتریس A_θ به دست می‌آید.

مثال ۱ در مثال ۷ از بخش ۱.۵، فرض می‌کنیم بـه ازای بردارهای مقدار تولید ناخالص $\begin{bmatrix}۵۰۰\\۱۰۰۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۸۰۰\\۱۲۰۰\end{bmatrix}$، بترتیب بردارهای مقدار تولیدخالص $\begin{bmatrix}۲۰۰\\۴۰۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۴۰۰\\۴۰۰\end{bmatrix}$ را داشته باشیم. یک ماتریس A بیابید به نحوی که $T(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$.

بنا به قضیهٔ ۲، می‌دانیم که چنین ماتریس Aای وجود دارد. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. چون $T\left(\begin{bmatrix}۵۰۰\\۱۰۰۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲۰۰\\۴۰۰\end{bmatrix}$، معادلات $۵۰۰a+۱۰۰۰b=۲۰۰$

و $۴۰۰ = ۵۰۰c + ۱۰۰۰d$ را به‌دست می‌آوریم. چون $T\left(\begin{bmatrix} ۸۰۰ \\ ۱۲۰۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۴۰۰ \\ ۴۰۰ \end{bmatrix}$، داریم $۸۰۰a + ۱۲۰۰b = ۴۰۰$ و $۸۰۰c + ۱۲۰۰d = ۴۰۰$. پس از تقسیم بر ۱۰۰، دستگاههای

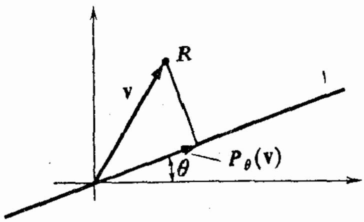
$$۵a + ۱۰b = ۲ \qquad ۵c + ۱۰d = ۴$$
$$۸a + ۱۲b = ۴ \qquad ۸c + ۱۲d = ۴$$

را به دست می‌آوریم.

با حل این دستگاهها، درمی‌یابیم که

$$a = \frac{۴}{۵}،\ b = -\frac{۱}{۵}،\ c = -\frac{۲}{۵}،\ \text{و}\ d = \frac{۳}{۵}،\ \text{یا}\ A = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} & -\frac{۱}{۵} \\ -\frac{۲}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}.$$

مثال ۲ به عنوان مثالی دیگر، تبدیل تصویری زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنیم l خطی در صفحه است که از مبدأ می‌گذرد و با محور xها زاویهٔ θ درجه می‌سازد. اگر $\mathbf{v}$ برداری در صفحه با انتهای R باشد، فرض می‌کنیم $P_\theta(\mathbf{v})$ برداری در امتداد خط l باشد که انتهایش نقطهٔ S، یعنی پای عمودی است که از نقطهٔ R بر خط l رسم می‌شود. خط l رسم (ر. ک. شکل ۷.۵)ل ۷.۵)



شکل ۷.۵

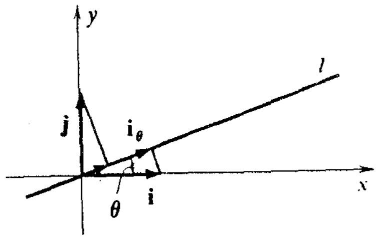
خطی بودن تابع P_θ را، که به طور هندسی تعریف شد، می‌توان به‌روشی ثابت کرد که کاملاً مشابه است با روشی که در بخش ۲.۲ برای اثبات

$$\mathbf{v}(x,y) + \mathbf{v}(x',y') = \mathbf{v}(x+x',y+y')$$

(یعنی اثبات این امر که تعریف جبری و تعریف هندسی بردارها هم ارزند) به‌کاررفت. در واقع، اگر $\theta = ۰$، یعنی اگر خط l خود محور xها باشد، اثباتها کاملاً یکسان‌اند، زیرا دراین صورت $P_\theta(\mathbf{v}(x,y)) = x\mathbf{i}$.

با اثبات خطی بودن تابع P_θ به روش هندسی، می‌بینیم که ماتریسی، مثلاً B_θ، وجود دارد به طوری که $P_\theta(\mathbf{v}) = B_\theta\mathbf{v}$.

تعیین تابع P_θ را با یافتن ماتریس B_θ به پایان می‌رسانیم. برای به دست آوردن ماتریس B_θ فقط لازم است $P_\theta(\mathbf{i})$ و $P_\theta(\mathbf{j})$ را تعیین کنیم. (ر. ک. شکل ۸.۵)



شکل ۸.۵

اگر i_θ برداری به طول واحد در امتداد خط l باشد، واضح است که

$$\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}.$$

از درس مثلثات می‌دانیم که $\cos\theta$ طول بردار $P_\theta(\mathbf{i})$ و $\sin\theta$ طول بردار $P_\theta(\mathbf{j})$ می‌باشند. از اینرو،

$$P_\theta(\mathbf{i}) = (\cos\theta)\mathbf{i}_\theta = (\cos^2\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta\sin\theta)\mathbf{j}$$
$$P_\theta(\mathbf{j}) = (\sin\theta)\mathbf{i}_\theta = (\sin\theta\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin^2\theta)\mathbf{j}$$

بنابراین

$$P_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مثال ۳ یک کارخانهٔ تولید کنندهٔ چادر، سه نوع چادر تولید می‌کند. برای تولید یک چادر از نوع اول، ۴ متر مربع پارچهٔ کرباس و ۱۰ متر طناب لازم است. برای دومی ۶ مترمربع کرباس و ۱۶ متر طناب و برای سومی ۱۰ مترمربع کرباس و ۳۰ مترطناب لازم است. فرض کنیم $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ برداری باشدکه هریک ازمؤلفه‌های آن، تعدادچادرهای‌تولید شده ازیک نوع چادرباشد. فرض‌کنیم $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$، که درآن، a مقدارکرباس برحسب متر مربع است که برای تولید x_1 چادر از نوع اول، x_2 چادر از نوع دوم، و x_3 چادراز نوع سوم لازم است، و b مقدار طناب مورد نیاز برحسب متر است. در این صورت $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 30 \end{bmatrix}\mathbf{v}$. توجه‌کنید که عناصرستون iام این ماتریس، بترتیب‌مقدار کرباس و طناب لازم برای تولید یک چادر از نوع iام هستند.

در این مثال، تبدیل T، بردار محصول $\mathbf{v}$ را به بردار مواد مورد نیاز، $T(\mathbf{v})$، تبدیل می‌کند.

تمرینات

۱. تمام آن عملگرهای خطی روی $\mathbf{R}^۲$ را بیابید که بردارهای واقع بر خط $x = ۰$ را به بردارهای روی خط $x = ۰$، و بردارهای واقع بر خط $y = ۰$ را به بردارهای روی خط $y = ۰$ می‌برند.

۲. T عملگری‌خطی روی $\mathbf{R}^۲$است. ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ و

(الف) $T(\mathbf{i}) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $T(\mathbf{j}) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$،

(ب) $T(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{i}$ و $T(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \mathbf{j}$.

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی $\mathbf{R}^۲$ باشد و $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی مستقل خطی در $\mathbf{R}^۲$ باشند. اگر $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ و $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$، نشان دهید که T همانی است.

۴. اگر T تبدیلی‌خطی بین دوفضای برداری V و W باشد، و $x_۱$، $x_۲$، . . .، x_n بردارهایی در V باشند به‌نحوی‌که $T(x_۱)$،$T(x_۲)$،...،$T(x_n)$ مستقل خطی باشند، نشان دهیدکه x_iها در V مستقل خطی‌اند.

۵. فرض کنید $T:V \to W$ و $S:V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند. اگر $x_۱$، $x_۲$، . . .، x_n بردارهایی در V باشند به طوری که $\mathrm{sp}(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = V$، و اگر

$$T(x_۱) = S(x_۱), T(x_۲) = S(x_۲), \ldots, T(x_n) = S(x_n)$$

نشان دهید که $T = S$.

۶. مثالی از یک تبدیل خطی T از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$ بیاورید به قسمی که $x_۱$ و $x_۲$ مستقل خطی ولی $T(\mathbf{x}_۱)$ و $T(\mathbf{x}_۲)$ وابستهٔ خطی باشند.

۷. تمام آن تبدیلات خطی از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$ را بیابید که

(الف) خط $x = ۰$ را به خط $x = ۰$ ببرند.

(ب) خط $y = ۰$ را به خط $y = ۰$ ببرند.

(ج) خط $x = y$ را به خط $x = y$ ببرند.

۸. در نوع معینی از حیوانات، سه‌گروه سنی وجود دارد. تعدادحیوانات در هریک از سه گروه سنی را با یک بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $T(\mathbf{v})$ نشانگر جمعیت در هر یک از سه گروه سنی پس از طی یک سال باشد. همانند مثال ۳، از بخش ۵.۲، فرض کنید T خطی باشد.

مشاهده شده است که بردارهای جمعیت در چهار سال متوالی عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} ۱۶۰۰ \\ ۸۰۰ \\ ۴۰۰ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱۲۰۰ \\ ۱۲۰۰ \\ ۴۰۰ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ۱۴۰۰ \\ ۹۰۰ \\ ۶۰۰ \end{bmatrix}، \text{و} \begin{bmatrix} ۱۳۲۵ \\ ۱۰۵۰ \\ ۴۵۰ \end{bmatrix}.$$

نشان دهید که $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۳}{۴} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$؛ و همانند مثال ۳ از بخش ۵.۲، آن را تعبیر کنید. [راهنمایی: با کمی تفکر معلوم می‌شود که احتیاج به حل هیچ معادلهٔ خطی نیست.]

۹. دو لولهٔ آزمایش حاوی آب روی میزی قرار دارند. فرض کنید $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشانگر مقدار آب در هر یک از دو لوله باشد. عملی دو مرحله‌ای روی دو لوله انجام می‌شود. (۱) a برابر محتوای لولهٔ اول را در لولهٔ دوم می‌ریزیم. (۲) سپس b برابرمحتوای لولهٔ دوم را درلولهٔ اول می‌ریزیم ($a < ۱$، $b < ۱$). فرض کنید $T(\mathbf{v})$ نشانگر مقدار آب در هر یک از لوله‌ها پس از انجام عمل فوق باشد.

(الف) نشان دهید که $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} ۱ - a + ba & b \\ a - ba & ۱ - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

(ب) این عمل دو بار انجام می‌گیرد. نتایج آن عبارت‌اند از:

$\begin{bmatrix} ۱۶۰ \\ ۵۰ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱۸۰ \\ ۳۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱۳۰ \\ ۵۰ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۹۰ \\ ۹۰ \end{bmatrix}$. a و b را بیابید.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری دوبعدی و $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، و $\mathbf{x}_۳$ بردارهایی در V باشند به طوری که هر دوتا از آنها نسبت به هم مستقل خطی‌اند. و نیزفرض کنید $T:V \to V$ تبدیلی خطی باشد به نحوی که به ازای اسکالرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، و $\alpha_۳$،

$$T(\mathbf{x}_۱) = \alpha_۱\mathbf{x}_۱, T(\mathbf{x}_۲) = \alpha_۲\mathbf{x}_۲, T(\mathbf{x}_۳) = \alpha_۳\mathbf{x}_۳.$$

نشان دهید که اسکالری مانند α وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $\mathbf{x}\in V$، $T(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$. اگر $V = \mathbf{R}^۲$، این مطلب را به طور هندسی تعبیر کنید.

۱۱. فرض کنید

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \end{bmatrix}$$

بردارهایی مستقل‌خطی‌در $\mathbf{R}^۲$ باشند. فرض‌کنید T تبدیلی‌خطی از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۲$ باشدبه‌قسمی‌که

$$T\left(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \text{ و } T\left(\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y'_۱ \\ y'_۲ \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$، که در آن، A ماتریس ۲ × ۲ ی

$$A = \begin{bmatrix} y_۱ & y'_۱ \\ y_۲ & y'_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ & x'_۱ \\ x_۲ & x'_۲ \end{bmatrix}^{-۱}$$

است.

۱۲. فرض‌کنید T تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^3$ به $\mathbf{R}^3$ باشد. نشان دهید کـه T هر صفحه‌ای را کـه از مبدأ می‌گذرد به یک صفحه یا یـک خط مار بر مبدأ، و یا به خود مبدأ، می‌برد. مثالی برای هر یک از این حالات بیاورید.

۱۳. جمعیت پایتختی با بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مشخص می‌گردد، کـه در آن x جمعیت شهر و y جمعیت حومهٔ آن است. در طی یـک دورهٔ دهساله، معلوم شده است که کسر معین a از ساکنین شهر به حـومه تغییر مکان می‌دهند، و کسر معین b از حومه نشینان در شهر سکـونت می‌گزینند. بجز این مـوارد، عامل دیگری جمعیت را تغییر نمی‌دهد. در سه دهـهٔ متـوالی بردارهای جمعیت عبارت‌اند از: $\begin{bmatrix} 1000000 \\ 400000 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 920000 \\ 480000 \end{bmatrix}$، و $\begin{bmatrix} 852000 \\ 548000 \end{bmatrix}$، تابعی مانند T بیابید به طوری کـه $T(\mathbf{v})$ جمعیت پایتخت پس از ده سال بـاشد. مقـادیر a و b چیست؟

۱۴. اگر $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ تبدیلی خطی باشد، نشان دهیدکه اسکالرهای a_1، a_2، ...، a_n وجود دارند به نحوی که

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

۱۵. اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ پایهٔ متعارف $\mathbf{R}^n$ باشد، نمایش ماتریسی‌عملگرخطی T را بیابید، در صورتی که

(الف) $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$، $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$، ...، $T(\mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{e}_n$، $T(\mathbf{e}_n) = 0$،

(ب) $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$، $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$، ...، $T(\mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{e}_n$، $T(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_1$؛

(ج) $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$، $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$، ...، $T(\mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_{n-2}$، $T(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{n-1}$.

۱۶. نمایش ماتریسی تبدیل خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ را بیابید که بردار $\mathbf{x}$ را به بردار $\alpha\mathbf{x}$، که درآن α اسکالری ثابت است، می‌برد.

۳ فضای مقادیر

فرض کنیم T تبدیلی خطی از فضای برداری V بـه فضای برداری W باشد. می‌خواهیم آن بردارهای W را که هریک، نگارهٔ برداری از V است، مورد مطالعه قراردهیم. این مجموعه از بـردارها را **فضای مقادیر** تبدیل خطی T مـی‌نامیم، وآن را با R_T نشان می‌دهیم. لذا، $R_T = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = T(\mathbf{x})$، $\mathbf{x}$ به‌ازای $\mathbf{x}$ای در V، و $\mathbf{y} \in W\}$. برای توجیه این نامگذاری قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱ فرض کنیم $T:V \to W$ تبدیلی خطی ازفضای برداری V به فضای برداری W باشد. دراین صورت مجموعهٔ بردارهای $R_T = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = T(\mathbf{x})$، به‌ازای $\mathbf{x}$ای در V، و $\mathbf{y} \in W\}$

زیر فضایی از W است.

اثبات فرض می‌کنیم $\mathbf{y}_1$ و $\mathbf{y}_2$ بردارهایی متعلق به R_T باشند. بنا به تعریف R_T، بردارهای $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ در V وجود دارند به قسمی که $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ و $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. چون T خطی است، $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$، و از اینرو چون $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ نگارۀ برداری در V، یعنی نگارۀ $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$، تحت تبدیل T است، داریم $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in R_T$.

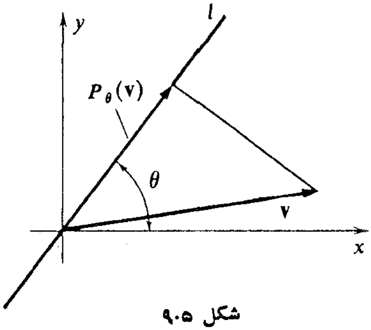
حال فرض می‌کنیم $\mathbf{y}$ متعلق به R_T و α یک اسکالر باشد. چون $\mathbf{y}$ در R_T است، یک بردار $\mathbf{x}$ در V وجود دارد به قسمی که $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. به دلیل خطی بودن T، $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{y}$. چون $\alpha\mathbf{y}$ نگارۀ برداری در V، یعنی نگارۀ $\alpha\mathbf{x}$، تحت تبدیل T است، می بینیم که $\alpha\mathbf{y}$ متعلق به R_T است. از آنجا که زیرمجموعۀ R_T تحت اعمال جبری جمع، و ضرب اسکالر بسته است، نتیجه می‌شود که R_T زیر فضایی از W است. ●

برای مثال، فضای مقادیر تبدیل صفر، N، دقیقاً زیرفضای صفراست. اگر $I_V:V \to V$ عملگر همانی روی فضای برداری V باشد، فضای مقادیر، تمامی فضای V است.

با استفاده ازاین مطلب که R_T زیر فضایی از فضای برداری W است وبا به‌کاربردن قضیۀ ۳ از بخش ۸.۴، بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که $\dim R_T \leqslant \dim W$.

کمیت $\dim R_T$ آنقدرمهم است‌که نام بخصوصی به‌آن داده‌شده‌است. آن را **رتبۀ** T می‌نامند و با $r(T)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ در مثال ۲ از بخش ۲.۵، تبدیل تصویری P_θ از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ را تعریف کردیم. بردار $P_\theta(\mathbf{v})$ به این طریق به دست می‌آید که بردار $\mathbf{v}$ را به‌طور عمودی روی خطی که با محور xها زاویۀ θ درجه می‌سازد تصویر می‌کنیم. (ر. ک. شکل ۹.۵.) از تعریف P_θ بلافاصله نتیجه می‌شود که هر بردار در فضای مقادیر P_θ، مضرب اسکالری از بردار $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ است. لذا R_{P_θ} زیرفضای یک بعدی $\mathbf{R}^2$ است که توسط بردار $\mathbf{i}_\theta$ پدید می‌آید. بعلاوه $r(P_\theta) = 1$.



شکل ۹.۵

مثال ۲ فرض می‌کنیم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1$$

$$a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = y_۲$$
$$\vdots$$
$$a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \cdots + a_{mn}x_n = y_m$$

دستگاهی از m معادلهٔ خطی n مجهولی باشد. با استفاده از نمادگذاری ماتریسی به صورت $A = [a_{ij}]_{(mn)}$، $\mathbf{x} = [x_i]_{(n۱)}$، $\mathbf{y} = [y_j]_{(m۱)}$، دستگاه معادلات فوق تبدیل می‌شود به معادلهٔ $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

فرض کنیم $T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ تبدیلی خطی باشد که به صورت $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود. فضای مقادیر T_A مرکب از تمام آن بردارهای $\mathbf{y}$ در $\mathbf{R}^m$ است که به ازای آنها یک بردار $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$ وجود داشته باشد به قسمی که $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. به عبارت دیگر، فضای مقادیر دقیقاً گردآوردهٔ بردارهایی است که به ازای آنها دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ قابل حل باشد.

روش حذفی گاوسی که درفصل اول مورد بحث قرارگرفت تکنیکی محاسباتی برای تعیین فضای مقادیر تبدیل خطی وابسته به یک ماتریس به دست می‌دهد. مثلاً اگر داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۷ \\ ۴ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

می‌توانیم تبدیل خطی T از $\mathbf{R}^۲$ به $\mathbf{R}^۳$ را که به صورت $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود، در نظر بگیریم. برای به دست آوردن فضای مقادیر T_A، باید آن بردارهای ستونی را بیابیم که به ازای مؤلفه‌های آنها ــ u، v، و w ــ دستگاه معادلات زیر قابل حل باشد:

$$\begin{aligned} x - y \qquad &= u \\ ۳x + y + ۷z &= v \\ ۴x \qquad + ۷z &= w \end{aligned}$$

از روش حذفی پیروی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x - y \qquad &= u \\ ۳x + y + ۷z &= v \\ ۴x \qquad + ۷z &= w \end{aligned}$$

$$\downarrow$$ مجهول x و معادلهٔ اول را بکار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x - y \qquad &= u \\ ۴y + ۷z &= v - ۳u \\ ۴y + ۷z &= w - ۴u \end{aligned}$$

$$\downarrow$$ مجهول z و معادلهٔ دوم را به‌کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x - y \qquad &= u \\ ۴y + ۷z &= v - ۳u \\ ۰ &= w - v - u \end{aligned}$$

چون درتنها معادله‌ای که به‌کار نرفته است، یعنی درسومی، همهٔ متغیرها دارای ضریب صفرند، فرایند متوقف می‌شود. لذا، برای اینکه دستگاه سازگار باشد، باید داشته باشیم $u - v - w = 0$. از طرف دیگر، اگر فرض کنیم $y = 0$، و x و z را با استفاده از دو معادلهٔ اول پیدا کنیم، می‌بینیم که درواقع دستگاه دارای یک جواب است. پس، فضای مقادیر تبدیل خطی T_A دقیقاً مرکب از بردارهایی است که برای‌آنها داریم $w = u + v$.

به منظور تعیین $r(T_A)$، باید بعد فضای مقادیر را بیابیم. واضح است که بردارهای $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هر دو عضو R_{T_A} هستند. چون هیچیک از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مضربی از دیگری نیست، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مستقل خطی‌اند. فرض کنیم $\mathbf{c}$ برداری در R_{T_A} باشد که مؤلفه‌هایش u، v، و w هستند. پس $w = u + v$. لذا،

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ u + v \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

بنابراین، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ فضای R_{T_A} را پدید می‌آورند. از اینرو $\dim R_{T_A} = 2$ و $r(T_A) = 2$.

دربخشهای بعدی روشهای دیگری برای تعیین رتبه وفضای مقادیرتبدیل خطی وابسته به یک ماتریس عرضه خواهیم کرد. برای توضیح بیشتر مثال فوق، قضیهٔ ۲ را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ و T_A تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ باشد که توسط A القا می‌شود. دراین صورت ستونهای ماتریس A فضای مقادیر T_A را پدید می‌آورند.

اثبات فرض کنیم $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ پایهٔ متعارف $\mathbf{R}^n$ باشد. اگر x در $\mathbf{R}^n$ باشد اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n وجوددارند به‌نحوی که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n$. پس،

$$\begin{aligned} T_A(\mathbf{x}) &= T_A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) \\ &= \alpha_1 T_A(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 T_A(\mathbf{e}_2) + \dots + \alpha_n T_A(\mathbf{e}_n) \\ &= \alpha_1(A\mathbf{e}_1) + \alpha_2(A\mathbf{e}_2) + \dots + \alpha_n(A\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

اما $A\mathbf{e}_i$ همان ستون iام ماتریس A است. چون هر بردار در R_{T_A} را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $A\mathbf{e}_1$، $A\mathbf{e}_2$، ...، $A\mathbf{e}_n$ نوشت، نتیجهٔ مطلوب، حاصل است. ●

برای مثال، اگر A ماتریس 2×4

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

باشد، قضیهٔ فوق می‌گوید که بردارهای

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}، و \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

فضای مقادیر T_A را پدید می‌آورند. چون بردارهای

$$\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای $\mathbf{R}^۲$ تشکیل می‌دهند، دیده می‌شود که $R_{T_A} = \mathbf{R}^۲$ و $r(T_A) = ۲$.

مثال ۳ فرض کنیم A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ای باشد. اگر T_A عملگری خطی روی $\mathbf{R}^n$ باشد که توسط A القا می‌شود، آنگاه $R_{T_A} = \mathbf{R}^n$.

زیرا تحت این شرایط، معادلهٔ $T_A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$، یعنی $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$، همیشه قابل حل است. در حقیقت، جواب این معادله، $\mathbf{x} = A^{-۱}\mathbf{y}$ می‌باشد.

مثال ۴ فرض کنیم S تابعی از M_{nn} به M_{nn} باشد که به‌صورت $S(A) = A + A^T$ تعریف می‌شود.

ابتدا، می‌بینیم که S خطی است. زیرا اگر A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند و α یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} S(A+B) &= A + B + (A+B)^T = A + B + A^T + B^T \\ &= A + A^T + B + B^T = S(A) + S(B) \end{aligned}$$

و

$$S(\alpha A) = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha (A + A^T) = \alpha S(A)$$

ادعا می‌کنیم که فضای مقادیر S دقیقاً فضای ماتریسهای متقارن است. اگر B متعلق به R_S باشد، آنگاه به ازای ماتریسی مانند A، $B = A + A^T$. از اینرو

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + A = B.$$

پس، هر ماتریس در R_S متقارن است.

اکنون، نشان می‌دهیم که هر ماتریس متقارن متعلق به R_S است. اگر B متقارن باشد، داریم $S(B/۲) = B/۲ + (B/۲)^T = (۱/۲ + ۱/۲)B = B$. لذا، B متعلق به R_S است.

از مطالب فوق چنین برمی‌آید که R_S دقیقاً فضای ماتریسهای متقارن است. چون بعد فضای ماتریسهای متقارن $n(n+۱)/۲$ است (ر. ک. تمرین ۱۱، بخش ۴.۷)، دیده می‌شود که $r(S) = n(n+۱)/۲$.

اگر برای تبدیل خطی مفروض $T: V \rightarrow W$ داشته باشیم $R_T = W$، T را **پوشا** می‌نامند. مثلاً، I_V عملگر همانی روی یک فضای برداری V، پوشاست. درمثال ۳ی فوق، تبدیل خطی T_A از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ که توسط ماتریس وارون پذیری القا شده است، پوشاست. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، تبدیل خطی T_A از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ که توسط A القا می‌شود، پوشاست اگر و فقط اگر دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ همیشه قابل حل باشد.

تمرینات

۱. پایه‌ای برای فضای مقادیر و نیز رتبهٔ تبدیل خطی القا شده توسط هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۵ \\ ۰ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ (ه) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۷ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$

۲. فرض کنید $D: P_n \to P_n$ عملگر مشتقگیری روی P_n باشد. نشان دهید که $R_D = P_{n-۱}$، و $r(D) = n$.

۳. اگر $T: V \to W$ تبدیلی خطی باشد و اگر $R_T = ۰$، نشان دهید که T عملگر صفر است.

۴. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. اگر $T: M_{nn} \to M_{nn}$ تبدیلی خطی باشد که به صورت $T(B) = AB$ تعریف شده است، نشان دهید که T پوشاست اگر و فقط اگر A وارون پذیر باشد.

۵. فرض کنید T تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد. اگر $x_۱$، $x_۲$،...، x_n بردارهایی در V باشند به طوری که $\mathrm{sp}(\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_n) = V$، نشان دهید که $T(\mathbf{x}_۱)$، $T(\mathbf{x}_۲)$،...، $T(\mathbf{x}_n)$ فضای R_T را پدید می‌آورند.

۶. فرض کنید $T: M_{nn} \to M_{nn}$ عملگری خطی باشد که روی فضای ماتریسهای $n \times n$ به صورت $T(A) = A^T$ تعریف می‌شود؛ نشان دهید که T پوشاست.

۷. پایه‌ای برای فضای مقادیر و نیز رتبهٔ هر یک از عملگرهای خطی روی P_n را که در زیر آمده‌اند بیابید.

(الف) $T(f) = xf'$، که f' مشتق f است.
(ب) $(T(f))(x) = \int_۰^x t f''(t)dt$، که f'' مشتق دوم f است.
(ج) $(T(f))(x) = f(x+۱)$.

۸. فرض کنید V فضایی برداری باشد و $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$،...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V؛ و همچنین T تابعی از V به $\mathbf{R}^n$ باشد که بردار $\mathbf{x}$ در V را به nتایی مختصات آن در $\mathbf{R}^n$ نسبت به پایهٔ $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$،...، $\mathbf{x}_n$ می‌برد. نشان دهید که T تبدیل خطی پوشایی از V به $\mathbf{R}^n$ است.

۹. فرض کنید A ماتریس قطری ۲×۲ای باشد که مضرب اسکالری از ماتریس همانی نیست و فرض کنید $C: M_{۲۲} \to M_{۲۲}$ عملگری خطی باشد که به صورت $C(B) = AB - BA$ تعریف می‌شود. نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای R_C تشکیل می‌دهند.

۱۰. فرض کنید $\mathbf{x} \neq 0$ بردار ثابتی در $\mathbf{R}^n$ باشد. نشان دهید تابعی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به $\mathbf{R}^n$، که به ازای هرماتریس $n \times n$ای مانند A به صورت $P(A) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود، تبدیل خطی پوشایی روی $\mathbf{R}^n$ است.

۱۱. فرض کنید $S: M_{nn} \to M_{nn}$ عملگری خطی باشد که به صورت $S(A) = A - A^T$ تعریف می‌شود. نشان دهید که R_S دقیقاً مرکب از ماتریسهای متقارن کج است. یعنی مرکب از ماتریسهایی است که در شرط $B^T = -B$ صدق می‌کنند.

۱۲. فرض کنید D ماتریس قطری $n \times n$ای باشد و $T(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ باشد که توسط D القا می‌شود. نشان دهید که رتبهٔ D دقیقاً عبارت است از تعداد درایه‌های غیر صفر روی قطر D.

۱۳. فرض کنید A و B ماتریسهای $n \times n$ای باشند و B وارون‌پذیر باشد و فرض کنید $S(\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$ و $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تبدیلاتی خطی روی $\mathbf{R}^n$ باشند که بترتیب توسط AB و A القا می‌شوند. نشان دهید که T و S دارای فضای مقادیر یکسان‌اند.

۱۴. فرض کنید $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ عملگری خطی با رتبهٔ ۱ باشد. نشان دهید که اسکالرهای a_1، a_2، ...، a_n، b_1، b_2، ...، b_n وجود دارند به‌طوری که $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$، که درآن

$$A = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_2a_1 \cdots b_na_1 \\ b_1a_2 & b_2a_2 \cdots b_na_2 \\ & \vdots \\ b_1a_n & b_2a_n \cdots b_na_n \end{bmatrix}$$

برعکس، نشان دهید که هر ماتریسی از این نوع، تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^n$ با رتبهٔ ۱ القا می‌کند.

۱۵. فرض کنید $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ تبدیلی خطی با رتبهٔ r باشد و فرض کنید $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_r$ پایه‌ای برای R_T باشد. اگر $T(\mathbf{e}_j) = a_{j1}\mathbf{x}_1 + a_{j2}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{jr}\mathbf{x}_r$، نشان دهید که

$$T(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ & \vdots & \\ a_{1r} & \cdots & a_{nr} \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

که‌در آن $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r]$ ماتریسی $n \times r$ است که ستونهایش، بترتیب $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_r$ اند.

این مطلب نشان می‌دهد که ماتریسی با رتبهٔ r را می‌توان به صورت حاصلضرب یک ماتریس $n \times r$ و یک ماتریس $r \times n$ نوشت. چگونه می‌توان از این مطلب، تمرین ۱۴ را نتیجه گرفت؟

۱۶. فرض‌کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند و T_A، T_B، و T_{A+B} تبدیلاتی‌خطی‌روی

$\mathbf{R}^n$ که بترتیب توسط ماتریسهای A، B، و $A + B$ القا شده‌اند. نشان دهید که

$$r(T_A) + r(T_B) \geqslant r(T_{A+B})$$

۱۷. یک تبدیل خطی بیابیدکه فضای ماتریسهای ۳ × ۳ را به‌طور پوشا به‌فضای‌ماتریسهای ۲ × ۲ ببرد.

۱۸. فرض کنید A ماتریس ثابت $n \times n$ای باشد و T تابعی از P_n به M_{nn} باشد که چندجمله‌ای $f(x)$ را به ماتریس $f(A)$ می برد. یعنی، اگر

$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$، آنگاه $T(f) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$.
نشان دهید که T تبدیلی خطی از P_n به M_{nn} است. اگر $n > 1$، چرا T پوشا نیست؟

۴ فضای پوچ

فرض کنیم T تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. زیرفضایی از V وجود دارد که به تبدیل T وابسته است و به تعبیری مکمل فضای مقادیرمی باشد که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفت. این زیرفضای V که با N_T نشان داده می‌شود مرکب از بردارهای $\mathbf{x}$ای است که در شرط $T(\mathbf{x}) = 0$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر، عناصر N_T فقط آن بردارهایی هستند که تحت تبدیل خطی T به صفر برده می‌شوند. N_T را **فضای پوچ** T می‌نامند. این نامگذاری با توجه به قضیهٔ زیر نامگذاری بجایی است.

قضیهٔ ۱ فرض کنیم $T:V \to W$ تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد. دراین صورت $N_T = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V, T(\mathbf{x}) = 0\}$ زیر فضایی از V است.

اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به N_T باشند. در این صورت

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) = 0 + 0 = 0.$$

لذا $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ متعلق به N_T است. اگر $\mathbf{x}$ در N_T و α یک اسکالر باشد،

$$T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

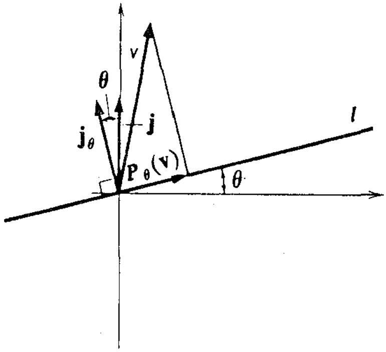
و بنابراین $\alpha\mathbf{x}$ به N_T تعلق دارد، پس N_T زیرفضایی از V است. ●

اگر T عملگر صفر از V به W باشد، چون T همهٔ بردارهای V را به 0 می‌برد، دیده می‌شود که $N_T = V$. اگر I_V عملگر همانی روی V باشد و $I_V(\mathbf{x}) = 0$، نتیجه می‌شود که $\mathbf{x} = 0$، زیرا $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. پس $N_{I_V} = 0$ زیر فضای صفر است.

کمیت $\dim N_T$، همانند $\dim R_T$، مورد توجه است. آن را **پوچی** T می‌نامند و با $n(T)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱ فرض کنیم P_θ تبدیل تصویری $\mathbf{R}^2$ باشد که در بخش ۲.۵ تعریف شد. یادآور می‌شویم که $P_\theta(\mathbf{v})$ با رسم عمودی از انتهای $\mathbf{v}$ بر خط l، که با محور xها زاویهٔ θ درجه می‌سازد، به دست می‌آید. بنابراین، انتهای $P_\theta(\mathbf{v})$ نقطهٔ تقاطع خط l با عمودی است که از انتهای $\mathbf{v}$ رسم می‌شود. (ر. ک. شکل ۱۰.۵) از این تعریف هندسی واضح است که

بردار $\mathbf{v}$ متعلق به‌فضای پوچ P_θ است‌وقتی‌وفقط وقتی‌که بر بردار $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ عمود باشد؛ یا به عبارت دیگر، اگر و فقط اگر بردار $\mathbf{v}$ مضرب اسکالری از بردار $\mathbf{j}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ باشد. لذا، فضای‌پوچ P_θ توسط بردار $\mathbf{j}_\theta$ پدیدمی‌آید و در نتیجه $n(P_\theta) = ۱$.



شکل ۵-۱۰

مثال ۲ فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ باشد. و T_A تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ باشد که توسط A القا شده است. بردار $\mathbf{x}$ متعلق به فضای پوچ T_A است اگر و فقط اگر $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. بنابراین می‌بینیم‌که فضای پوچ T_A همان فضای جوابهای دستگاه معادلات‌خطی‌همگنی است که با نماد ماتریسی به صورت $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ نوشته می‌شود.

با استفاده از روش حذفی گاوسی، می‌توان پایه‌ای برای فضای پوچ عملگرخطی القا شده توسط یک ماتریس به دست آورد. برای مثال، اگر T تبدیلی خطی از $\mathbf{R}^۵$ به $\mathbf{R}^۳$ باشد که به صورت

$$T\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۴ & ۱ & -۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، برای یافتن فضای پوچ آن باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \quad\quad &= ۰ \\ ۴x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ \quad\quad + x_۵ &= ۰ \\ x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ \quad\quad + ۲x_۵ &= ۰ \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

مجهول $x_۵$ و معادلهٔ دوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} x_۱ - x_۲ + ۳x_۳ + ۲x_۴ \quad\quad &= ۰ \\ ۴x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ \quad\quad + x_۵ &= ۰ \\ -۷x_۱ + x_۲ + ۵x_۳ \quad\quad &= ۰ \end{aligned}$$

مجهول $x_۲$ و معادلهٔ سوم را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} -۶x_۱ \quad & + ۸x_۳ + ۲x_۴ \quad && = ۰ \\ ۱۱x_۱ \quad & - ۷x_۳ \quad + x_۵ && = ۰ \\ -۷x_۱ + x_۲ & + ۵x_۳ && = ۰ \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم مجهول $x_۴$ و معادلهٔ اول را به کار برده‌ایم تا به این ترتیب دستگاهی پیدا شود که در آن همهٔ معادلات به کار رفته‌اند.

بافرض $x_۱ = c$ و $x_۳ = d$، دیده می‌شودکه‌عمومیترین جواب به این صورت‌است:

$$\begin{bmatrix} c \\ ۷c - ۵d \\ d \\ ۳c - ۴d \\ -۱۱c + ۷d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \\ ۰ \\ ۳ \\ -۱۱ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \\ ۱ \\ -۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

چون بردارهای سمت راست تساوی فوق بوضوح مستقل خطی‌اند و فضای N_T را پدید می‌آورند، پایه‌ای برای N_T تشکیل می‌دهند. چون N_T دارای پایه‌ای مرکب از دو بردار است، داریم $n(T) = ۲$.

مثال ۳ فرض کنیم $D:P_n \to P_n$ عملگر مشتقگیری روی فضای چندجمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتراز n باشد، $D(f) = f'$. اگر چند جمله‌ای f متعلق به N_D باشد، آنگاه $f' = ۰$. با توجه به مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال و یا با استفاده از پایهٔ متعارف ۱، x، $x^۲$، . . .، x^n برای P_n، دیده می‌شودکه f بایدیک چندجمله‌ای ثابت‌باشد. یعنی، f مضرب اسکالری از چند جمله‌ای ۱ است. پس، چند جمله‌ای ۱ پایه‌ای برای N_D تشکیل می‌دهد و از اینجا $n(D) = ۱$.

مثال ۴ فرض کنیم S همان عملگر خطی روی M_{nn} باشد که در مثال ۴ بخش ۳.۵ تعریف شد. در این صورت $S(A) = A + A^T$. بنابراین N_S دقیقاً مرکب از ماتریسهایی مانند A است‌که در $S(A) = A + A^T = ۰$ صدق کنند. از اینرو A متعلق است به N_S اگر وفقط اگر $A^T = -A$. یعنی، A باید یک ماتریس متقارن کج باشد.

تبدیل خطی $T: V \to W$ را **یک به‌یک** گویند اگر $T(\mathbf{x}_۱) = T(\mathbf{x}_۲)$ نتیجه دهد $\mathbf{x}_۱ = \mathbf{x}_۲$. به عبارت دیگر، اگر هر بردار از W نگارهٔ حداکثر یک بردار از V باشد.

برای مثال، اگر A ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ای باشد، عملگری خطی روی $\mathbf{R}^n$ که به صورت $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود یک به یک است. درواقع، اگر $A\mathbf{x}_۱ = A\mathbf{x}_۲$، با ضرب طرفین این تساوی در $A^{-۱}$، خواهیم داشت $A^{-۱}(A\mathbf{x}_۱) = A^{-۱}(A\mathbf{x}_۲)$ یا $\mathbf{x}_۱ = \mathbf{x}_۲$.

ازطرف دیگر، به‌عنوان مثالی ازیک تبدیل‌خطی که‌یک به‌یک نیست، عملگرمشتقگیری D روی P_n را در نظر می‌گیریم. داریم $D(۱) = D(۰) = ۰$، ولی $۱ \neq ۰$.

تبدیلات یک به یک را می‌توان برحسب فضای پوچ آنها مشخص کرد.

قضیهٔ ۲ فرض کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دوفضای برداری V و W باشد. دراین صورت، T یک به یک است اگر و فقط اگر $N_T = \circ$، یعنی، $n(T) = \circ$.

اثبات ابتدا فرض می‌کنیم T یک به یک باشد. گیریم $\mathbf{x}$ برداری متعلق به N_T باشد. پس، $T(\mathbf{x}) = \circ$. چون $T(\circ) = \circ$، نتیجه می‌شود که نگارهٔ بردارهای $\circ$ و $\mathbf{x}$ در W، یکسان‌اند. چون T یک به یک است، این بردارها باید مساوی باشند. یعنی، $\mathbf{x} = \circ$. پس، ثابت کردیم که هر بردار متعلق به N_T صفر است، و از این قرار N_T زیرفضای صفر می‌باشد.

از طرف دیگر، اگر N_T زیرفضای صفر باشد، فرض می‌کنیم $T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2)$. پس $T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1) - T(\mathbf{x}_2) = \circ$. اما چون $N_T = \circ$، داریم $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \circ$، یا $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. ازآنجاکه $T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2)$ نتیجه می‌دهد $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$، T یک به یک است. ●

فرض کنیم تبدیل خطی T، که توسط ماتریس $m \times n$ای مانند A القا شده، یک به یک باشد. از این مطلب چه نتیجه‌ای دربارهٔ دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ می‌توان گرفت؟ این فرض بدان معنی نیست که جوابی برای دستگاه وجود دارد ودرحقیقت ممکن است هیچ جوابی وجود نداشته باشد. لکن، وقتی که دستگاه قابل حل باشد، جوابها یکتا هستند. بجاست که خاصیت پوشا بودن را با خاصیت یک به یک بودن مقایسه کنیم. وقتی T پوشا باشد، دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ همیشه قابل حل است، ولی لازم نیست که جواب آن یکتا باشد.

در مورد رتبه و پوچی یک تبدیل خطی، قضیه‌ای بنیادی وجود دارد که در زیر می‌آوریم.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دوفضای برداری متناهی‌البعد باشد. در این صورت، $\dim R_T + \dim N_T = \dim V$، و یا $r(T) + n(T) = \dim V$.

اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$ پایه‌ای برای N_T و $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ پایه‌ای برای R_T باشد. دراین صورت $\dim N_T = m$ و $\dim R_T = n$. چون $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ متعلق به R_T هستند، بردارهای $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_2$، ...، $\mathbf{z}_n$ متعلق به V وجود دارند به طوری که

$$T(\mathbf{z}_1) = \mathbf{y}_1, T(\mathbf{z}_2) = \mathbf{y}_2, \ldots, T(\mathbf{z}_n) = \mathbf{y}_n$$

می‌خواهیم نشان دهیم‌که $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$، $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_2$، ...، $\mathbf{z}_n$، پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. اولاً، بردارهای فوق مستقل خطی‌اند. زیرا فرض می‌کنیم داشته باشیم

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m + \beta_1\mathbf{z}_1 + \beta_2\mathbf{z}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{z}_n = \circ$$

و سپس تبدیل T را روی این تساوی اعمال می‌کنیم

$$\alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2) + \cdots + \alpha_m T(\mathbf{x}_m) + \beta_1 T(\mathbf{z}_1) + \beta_2 T(\mathbf{z}_2) + \cdots + \beta_n T(\mathbf{z}_n) = \circ$$

چون $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$ متعلق به N_T هستند، $T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2) = \dots = 0$، لذا $\beta_1 T(\mathbf{z}_1) + \beta_2 T(\mathbf{z}_2) + \dots + \beta_n T(\mathbf{z}_n) = 0$. اما بنا به فرض، $T(\mathbf{z}_1) = \mathbf{y}_1$، $T(\mathbf{z}_2) = \mathbf{y}_2$، ...، $T(\mathbf{z}_n) = \mathbf{y}_n$ پایه‌ای برای R_T است. پس $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$، و بنابراین $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{x}_m = 0$، چون $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$ پایه‌ای برای N_T است، داریم $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. از اینرو بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$، $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_2$، ...، $\mathbf{z}_n$ مستقل خطی‌اند.

ثانیاً، بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$، $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_2$، ...، $\mathbf{z}_n$ فضای V را پدید می‌آورند. زیرا اگر فرض کنیم $\mathbf{x}$ برداری در V باشد، آنگاه $T(\mathbf{x})$ برداری در R_T است و چون $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ پایه‌ای برای R_T است، اسکالرهای β_1، β_2، ...، β_n وجود دارند به نحوی که $T(\mathbf{x}) = \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \dots + \beta_n\mathbf{y}_n$.

بردار $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \beta_1\mathbf{z}_1 - \beta_2\mathbf{z}_2 - \dots - \beta_n\mathbf{z}_n$ را درنظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}) &= T(\mathbf{x}) - \beta_1 T(\mathbf{z}_1) - \beta_2 T(\mathbf{z}_2) - \dots - \beta_n T(\mathbf{Z}_n) \\ &= \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \dots + \beta_n\mathbf{y}_n - \beta_1\mathbf{y}_1 - \beta_2\mathbf{y}_2 - \dots - \beta_n\mathbf{y}_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس $\mathbf{a} \in N_T$، و چون $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$ پایه‌ای برای N_T است، اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_m وجود دارند به قسمی که $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{x}_m$. یا $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \beta_1\mathbf{z}_1 - \beta_2\mathbf{z}_2 - \dots - \beta_n\mathbf{z}_n = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{x}_m$ دیده می‌شود که

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{x}_m + \beta_1\mathbf{z}_1 + \beta_2\mathbf{z}_2 + \dots + \beta_n\mathbf{z}_n.$$

بنابراین، بردارهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$، $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_2$، ...، $\mathbf{z}_n$ فضای V را پدید می‌آورند و چون در بالا ثابت کردیم که مستقل خطی‌اند، دیده می‌شود که $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_m$، $\mathbf{z}_1$، $\mathbf{z}_2$، ...، $\mathbf{z}_n$ پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. لذا،

$$\begin{aligned} \dim V &= m + n \\ &= \dim N_T + \dim R_T \end{aligned}$$

●

نتیجه ۱ اگر $T: V \to W$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه $\dim R_T \leqslant \dim V$.

اثبات از قضیهٔ فوق، می‌دانیم که $\dim V = \dim R_T + \dim N_T \geqslant \dim R_T$. ●

حال فرض می‌کنیم $\dim W > \dim V$. چون $\dim V \geqslant \dim R_T$، باید داشته باشیم $\dim W > \dim R_T$. پس، اگر $T: V \to W$ تبدیلی خطی باشد و $\dim W$ بزرگتر از $\dim V$ باشد، T پوشا نیست.

مثال ۵ فرض کنیم

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

دستگاهی از m معادلهٔ n مجهولی باشد. اگر $m > n$، یعنی اگر تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد، بنا به نتیجهٔ ۱، می‌توان مقادیری برای y_1، y_2، …، y_m یافت به طوری که دستگاه قابل حل نباشد.

نتیجهٔ ۲ اگر $T:V\to W$ تبدیلی خطی باشد و $\dim W < \dim V$، آنگاه $N_T \neq 0$، یعنی $n(T) > 0$.

اثبات می‌دانیم که $\dim N_T + \dim R_T = \dim V$. چون R_T زیرفضایی از W است، $\dim R_T \leqslant \dim W < \dim V$. لذا $\dim N_T = \dim V - \dim R_T > 0$. ●

مثال ۶ فرض کنیم

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

دستگاهی از m معادلهٔ خطی همگن n مجهولی باشد، که در آن $m < n$، یعنی تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است. طبق معمول فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]_{(mn)}$ و تبدیل خطی $T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ وابسته به ماتریس A را در نظر می‌گیریم. چون $\dim \mathbf{R}^m < \dim \mathbf{R}^n$، بنا به نتیجهٔ ۲، N_{T_A} علاوه بر بردارصفر باید شامل بردار دیگری نیز باشد. این بیان دیگری از مطلبی است که در فصل اول ثابت کردیم، یعنی اینکه دستگاه فوق دارای جواب غیر-بدیهی است.

نتیجهٔ ۳ فرض کنیم $T:V\to W$ تبدیلی خطی باشد و $\dim V = \dim W$. در این صورت T یک به یک است اگر و فقط اگر پوشا باشد.

اثبات بنا به قضیهٔ ۳، $\dim R_T + \dim N_T = \dim V = \dim W$. از اینرو $\dim N_T = \dim W - \dim R_T$. پس، $\dim N_T = 0$ (یعنی، T یک به یک است) اگر و فقط اگر $\dim W = \dim R_T$ (یعنی T پوشا باشد). ●

مثال ۷ فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد. دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ را در نظر

می‌گیریم کــه در آن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، n-بردار هستند. طبق نتیجهٔ ۳، مـی‌بینیم کــه، مقدار $\mathbf{y}$ هـر چه باشد دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ قابل حل است اگرو فقط اگردستگاه $A\mathbf{x} = \circ$ فقط دارای جواب بدیهی $\mathbf{x} = \circ$ باشد.

مثال ۸ فرض‌کنیم P_n نشانگرفضای تمام چندجمله‌ایهای حقیقی ازدرجهٔ نابیشتر از n باشد. عملگر خطی T را روی P_n به‌صورت

$$T(f) = (c_\circ + c_1 x + c_2 x^2) f'' + (b_\circ + b_1 x) f' + a_\circ f$$

تعریف می‌کنیم که درآن aها، bها، و cها همگی اعداد حقیقی‌اند. بآسانی می‌توان تحقیق کردکه T خطی است و چند جمله‌ایهای از درجهٔ n را به‌چند جمله‌ایهای ازدرجهٔ نابیشتر از n می‌برد. در واقـع، عملگـر T مثـالـی از یک نوع عملگر دیفـرانسیلی خطی است. چنین عملگرهایی در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل دارای اهمیت‌اند. حال این سؤال پیش می‌آید که: اگر g یک چند جمله‌ای باشد،آیا می‌توانیم معادلهٔ دیفرانسیل

$$(c_\circ + c_1 x + c_2 x^2) f'' + (b_\circ + b_1 x) f' + a_\circ f = g$$

را حل کنیم؟ به این سؤال بآسانی می‌توان جواب داد.

یا

(۱) به‌ازای هرچندجمله‌ای g، معادله‌دارای یک جواب‌چندجمله‌ای یکتای f است،

و یا

(۲) معادلهٔ $(c_\circ + c_1 x + c_2 x^2) f'' + (b_\circ + b_1 x) f' + a_\circ f = \circ$

دارای یک‌جواب چند جمله‌ای غیر صفر است.

برای ملاحظهٔ این مطلب، فرض می‌کنیم که g یک چند جمله‌ای از درجهٔ n باشد. در این صورت T عملگری خطی روی P_n است. اگر $N_T \neq \circ$، نتیجه‌گیری دوم برقرار است. لذا، می‌توانیم فرض کنیم $N_T = \circ$. پس T یک به یک است. بنا به نتیجهٔ ۳، T پوشاست. از اینرو معادلهٔ $T(f) = g$ را می‌توان به ازای هر چند جمله‌ای g حل کرد.

تمرینات

۱. پایه‌ای برای فضای پوچ و نیز پوچی تبدیل خطی وابسته به‌هر یک از ماتریسهای زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & \circ & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} \circ & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1\circ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & \circ & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ه) $\begin{bmatrix} \circ & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & \circ & 2 & -1 & -1 \\ 1 & \circ & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

۲. فرض کنید a_1، a_2، . . .، a_n، n عدد حقیقی باشند که لااقل یکی ازآنها صفر نیست. نشان دهید که تابع

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}$ خطی است. نشان دهید که فضای پوچ این تابع دارای بعد $n - 1$ است.

۳. فرض کنید D^k تبدیلی خطی از P_n به P_n باشد که هر چند جمله‌ای را به مشتق kام‌آن می‌برد. نشان دهید که فضای پوچ D^k دارای بعد k است.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی P_2 باشد که به صورت

$$T(f) = f - xf' + (a - x^2)f''$$

تعریف می‌شود، که درآن a عدد مفروضی است. نشان دهید که چند جمله‌ای x فضای N_T را پدید می‌آورد.

۵. یک تبدیل خطی T از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ بیابید به‌طوری که $R_T = N_T$.

۶. فرض کنید D ماتریس قطری $n \times n$ای باشد و $T_D(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ عملگری خطی روی R^n که توسط D القا شده است. نشان دهید که پوچی T_D عبارت است از تعداد صفرهای روی قطر D.

۷. فرض کنید V فضایی برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V، ونیز فرض کنید $T: V \to V$ تبدیلی خطی باشد به نحوی که

$$T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2, T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_3, \ldots, T(\mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{x}_n, T(\mathbf{x}_n) = 0$$

$n(T)$ را بیابید.

۸. فرض‌کنید $T: V \to V$ تبدیلی خطی با این خاصیت باشد که $N_T = V$. نشان دهید که T عملگر صفر است.

۹. اگر A ماتریس $n \times n$ای باشد و n-بردار غیر صفری مانند $\mathbf{x}$ وجود داشته باشد به قسمی که $A\mathbf{x} = 0$، نشان دهید که $r(A) < n$. عکس این مطلب را نیز ثابت کنید.

۱۰. فرض‌کنید A ماتریس ثابت $n \times n$ای باشد. بعد فضای پوچ عملگر القا شده توسط A روی $\mathbf{R}^n$ را k بگیرید. اگر T تبدیلی خطی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به خودش باشد که به صورت $T(B) = AB$ تعریف می‌شود،

(الف) نشان دهید که B متعلق به N_T است اگر و فقط اگر هرستون B متعلق به N_A باشد.

(ب) نشان دهید که $n(T) = nk$.

(پ) نشان دهید که $r(T) = nr(A)$

۱۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. فرض کنید $T_A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ تبدیل خطی

$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ باشد که در آن، $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) T_A پوشاست اگر و فقط اگر ستونهای A فضای $\mathbf{R}^m$ را پدیدآورند.
(ب) T_A یک به یک است اگر و فقط اگر ستونهای A مستقل خطی باشند.
(ج) اگر T_A یک به یک و پوشا باشد،آنگاه $m = n$.

۱۲. فرض کنید T تبدیلی خطی از فضای برداری V به‌فضای برداری W باشد و $\mathbf{y} \in W$. اگر معادلهٔ $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ نسبت به $\mathbf{x} \in V$ به‌طور یکتا قابل حل باشد، نشان دهید که T یک به یک است.

۱۳. فرض کنید $T: P_n \rightarrow P_n$ عملگری خطی روی فضای چند جمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x و از درجهٔ نابیشتر از n باشد که به صورت $T(f) = f + xf'$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T یک به یک و پوشاست.

۱۴. مثالی از یک تبدیل خطی روی $\mathbf{R}^۳$ با رتبهٔ ۱، و نیز با رتبهٔ ۲ بیاورید.

۱۵. فرض کنید T تبدیلی خطی روی $\mathbf{R}^۲$ باشد، $T \neq ۰$ و T پوشا نباشد. $r(T)$ و $n(T)$ را به دست آورید.

۱۶. فرض کنید $T: V \rightarrow W$ تبدیلی خطی با این خاصیت باشد که هرگاه $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، . . .، $\mathbf{x}_n$ در V مستقل خطی باشند، $T(\mathbf{x}_۱)$،$T(\mathbf{x}_۲)$، . . .، $T(\mathbf{x}_n)$ در W استقلال خطی داشته باشند. نشان دهید که T یک به یک است. برعکس اگر T یک به یک باشد، نشان دهید که T این خاصیت را دارد.

۱۷. فرض کنید $T: P_n \rightarrow P_n$ تابعی باشد که چند جمله‌ای $f(x)$ را به چند جمله‌ای $\frac{۱}{۲}(f(x) + f(-x))$ می‌برد.

(الف) نشان دهید که T خطی است.
(ب) نشان دهید که R_T دقیقاً مرکب از چند جمله‌ایهای زوج در P_n است.
(ج) نشان دهید که N_T دقیقاً مرکب از چند جمله‌ایهای فرد در P_n است.

۱۸. فرض کنید $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ عملگر خطی

$$T\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱-n & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱-n & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱-n & \cdots & ۱ \\ & & \vdots & & \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱-n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید که N_T توسط آن n-بردار ستونی که همهٔ مؤلفه‌هایش ۱ است پدید می‌آید. $r(T)$ چقدر است؟

۱۹. فرض کنید A ماتریس ثابت $n \times n$ای باشد. فرض کنید T تبدیلی خطی از M_{nn} به M_{nn} باشد که به صورت $T(B) = AB - BA$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T

یک به یک نیست.

۲۰. اگر f یک چند جمله‌ای ازدرجهٔ نابیشتر از n باشد، نشان دهید که یک چندجمله‌ای g از درجه نابیشتراز n وجود دارد به قسمی که $g + g' = f$.

۲۱. فرض کنید T تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد. فرض کنید $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ و $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_m$ بردارهایی در V باشند. اگر $\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)=N_T$ و $\operatorname{sp}(T(\mathbf{y}_1),T(\mathbf{y}_2),\ldots,T(\mathbf{y}_m)) = R_T$، نشان دهید که

$$\operatorname{sp}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_m)=V.$$

۲۲. فرض‌کنید $T:V\to V$ عملگری‌خطی روی فضای برداری V باشد. اگر $R_T = N_T$، نشان دهید که $\dim V$ زوج است.

۲۳. اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد. نشان دهیدکه ماتریس $n\times n$ای مانند B، $B\neq 0$، وجود دارد به طوری که $AB=0$ اگر و فقط اگر $r(A)<n$.

۲۴. اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد، نشان دهید که ماتریس $m\times m$ای مانند B، $B\neq 0$، وجود دارد به نحوی که $BA=0$ اگر و فقط اگر $r(A)<m$.

۲۵. فرض کنید $0\leqslant k\leqslant n$. نشان دهید که تبدیلی خطی روی $\mathbf{R}^n$ وجود دارد که پوچی آن k است.

۵ رتبه، و ماتریسهای مقدماتی

اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد، A تبدیل‌خطی $T_A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ را، که به‌صورت $T_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود، القا می‌کند. رتبهٔ T_A را بــه عنوان بعد فضای مقادیر T_A تعــریف کردیم. منظور از **رتبهٔ ماتریس** A، همان رتبهٔ تبــدیل خطی T_A است. همچنین فضای مقادیر T_A را فضای مقادیر A نیز می‌نامیم.

ستونهای ماتریس A را با A_1، A_2، ...، A_n نشان می‌دهیم؛ در بخش ۳.۵ دیدیم که فضای مقادیر T_A توسط m-بردارهای A_1، A_2، ...، A_n پدید می‌آید؛ به همین دلیل فضای مقادیر T_A راگاهی **فضای ستونی** ماتریس A می‌نامند. لذا، رتبهٔ ماتریس A را می‌توان به عنوان بعد فضای پدید آمده تــوسط m-بردارهای A_1، A_2، ...، A_n نیز تعریف کرد. بنابه قضیهٔ ۱ از بخش ۷.۴، می‌بینیم که رتبهٔ A بیشینهٔ تعداد بردارهای مستقل خطی در گردآوردهٔ A_1، A_2، ...، A_n است، دراین بخش، مسئله محاسبهٔ رتبهٔ یک‌ماتریس رابا ارائهٔ‌آلگوریتمی برای این محاسبه، به صورت ساده‌ای درمی‌آوریم. قضیهٔ زیــر بــرای ارائهٔ فرایند محاسبهٔ رتبه، مهم است.

قضیهٔ ۱ فرض‌کنیم A ماتریسی $m\times n$، B ماتریسی $m\times m$، و C ماتریسی $n\times n$ باشد. در این صورت $r(BA)\leqslant r(A)$ و $r(AC)\leqslant r(A)$.

اثبات ابتدا ثابت می‌کنیم که $r(BA)\leqslant r(A)$.

فرض می‌کنیم $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، . . .، $\mathbf{y}_{r(A)}$ پایه‌ای برای فضای مقادیر A باشد. لذا، اگر $\mathbf{x}$ متعلق به $\mathbf{R}^n$ باشد، اسکالرهای α_1، α_2، . . .، $\alpha_{r(A)}$ وجود دارند به قسمی که

$$A\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_{r(A)}\mathbf{y}_{r(A)}$$

از اینرو

$$\begin{aligned}(BA)(\mathbf{x}) &= B(A\mathbf{x}) \\ &= B(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_{r(A)}\mathbf{y}_{r(A)}) \\ &= \alpha_1 B\mathbf{y}_1 + \alpha_2 B\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_{r(A)} B\mathbf{y}_{r(A)}\end{aligned}$$

پس، بردارهای $B\mathbf{y}_1$، $B\mathbf{y}_2$، . . .، $B\mathbf{y}_{r(A)}$ فضای مقادیر BA را پدید می‌آورند. بنا به قضیهٔ ۱ از بخش ۸.۴، می‌بینیم که $\dim R_{BA} \leqslant \dim R_A$. لذا، $r(BA) \leqslant r(A)$.

اکنون، نشان می‌دهیم که $r(AC) \leqslant r(A)$. ادعا می‌کنیم که فضای مقادیر AC زیرمجموعه‌ای است از فضای مقادیر A. فرض می‌کنیم $\mathbf{y}$ متعلق به‌فضای مقادیر AC باشد، $\mathbf{y} = (AC)(\mathbf{x}) = A(C\mathbf{x})$. پس، $\mathbf{y}$ نگارهٔ برداری، یعنی نگارهٔ بردار $C\mathbf{x}$، تحت A است و بنابراین $\mathbf{y}$ متعلق به فضای مقادیر A می‌باشد. لذا، فضای مقادیر AC زیر فضایی از فضای مقادیر A است. از اینرو بنا به قضیهٔ ۳ از بخش ۸.۴، $\dim R_{AC} \leqslant \dim R_A$، یا $r(AC) \leqslant r(A)$. ●

از قضیهٔ فوق نتیجهٔ زیر را بلافاصله به دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۲ فرض‌کنیم A ماتریسی $m \times n$، B یک ماتریس وارون‌پذیر $m \times m$، و C ماتریس وارون پذیر $n \times n$ای باشد. در این صورت

$$r(AC) = r(A) \quad \text{و} \quad r(BA) = r(A)$$

اثبات بنا به قضیهٔ ۱، $r(BA) \leqslant r(A)$. باز طبق قضیهٔ ۱، $r(B^{-1}(BA)) \leqslant r(BA)$، یا $r(A) \leqslant r(BA)$. لذا $r(A) = r(BA)$. اثبات تساوی $r(AC) = r(A)$ نیز به همین ترتیب است. ●

برای مثال، فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۷ & ۲ & ۹ \end{bmatrix} \text{. در این صورت } BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

چون $\det A = ۱$، A وارون پذیر است. پس $r(BA) = r(B)$. چون BA دقیقاً دارای دو ستون مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $r(B) = ۲$.

قضیهٔ ۲ را می‌توان به‌صورت زیر بیان‌کرد: اگرماتریس وارون‌پذیری را دریک‌ماتریس ضرب کنیم، رتبهٔ آن عوض نمی‌شود. هدف بعدی ما یافتن خانواده‌ای از ماتریسهای سادهٔ وارون پذیر است که به ما امکان می‌دهد ماتریس مفروضی را با انجام رشته‌ای از ضربهای ماتریسی، به ماتریسی که محاسبهٔ رتبه‌اش آسان است تبدیل کنیم. خانوادهٔ ماتریسهای مقدماتیی که در زیر توصیف می‌کنیم این خاصیت را دارند.

فرض کنیم ماتریس E حاصل یکی از سه عمل زیر روی ماتریس همانی باشد:

(۱) تعویض دو ستون از ماتریس همانی.
(۲) ضرب یک ستون از ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر.
(۳) افزودن مضرب اسکالری از یک ستون ماتریس همانی به ستون دیگرش.

در این صورت، E را یک **ماتریس مقدماتی** می‌نامند.

ماتریسهای زیر همگی مثالهایی از ماتریسهای مقدماتی هستند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس اولی با تعویض ستونهای اول و سوم ماتریس $I_۳$، دومی با ضرب ستون دوم $I_۳$ در ۲، و سومی با افزودن (-۷) برابر ستون اول $I_۳$ به ستون سومش، به دست آمده‌اند.

برای توصیف نتیجهٔ ضرب یک ماتریس مقدماتی دریک ماتریس دیگر، روش بسیار ساده‌ای وجود دارد. ابتدا شرح می‌دهیم که ماتریس $m \times n$ ای مانند A، وقتی ماتریس مقدماتی $n \times n$ ای مثل E را از سمت راست در آن ضرب می‌کنیم، یعنی وقتی حاصلضرب AE را تشکیل می‌دهیم، چه تغییری می‌کند.

درآنچه بعداً می‌آید، از مطلب زیر استفادهٔ فراوان خواهیم کرد که: اگر A ماتریس $m \times n$ ای باشد و $\mathbf{e}_i$ بردار iام پایهٔ متعارف $\mathbf{R}^n$، آنگاه $A\mathbf{e}_i$ همان ستون iام ماتریس A است که‌آن را با A_i نشان می‌دهیم.

گزارهٔ ۱ فرض می‌کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض ستونهای i و j $(i < j)$ از ماتریس I_n باشد. در این صورت، حاصلضرب AE به این طریق حاصل می‌شود که ستونهای i و j در ماتریس A با هم تعویض می‌شوند و بقیهٔ ستونها ثابت می‌مانند.

اثبات چون E از تعویض ستونهای i و j ماتریس I_n به دست می‌آید، ستون iام E، $\mathbf{e}_j$ و ستون jام آن، $\mathbf{e}_i$ است و به‌ازای $k \neq i, j$ ستون kامش $\mathbf{e}_k$ است. لذا، $E\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j$، $E\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i$ و به ازای $k \neq i, j$ داریم $E\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k$. لذا

$$(AE)\mathbf{e}_i = A(E\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_j = A_j$$
$$(AE)\mathbf{e}_j = A(E\mathbf{e}_j) = A\mathbf{e}_i = A_i$$
$$(AE)\mathbf{e}_k = A(E\mathbf{e}_k) = A\mathbf{e}_k = A_k \qquad \text{به‌ازای } k \neq i, j،$$

پس معلوم می‌شود که A_j ستون iام AE، A_i ستون jام AE، و به ازای $k \neq i, j$، A_k ستون kام AE است. به عبارت دیگر AE با تعویض ستونهای i و j از ماتریس A به دست می‌آید. ●

مثلا اگر $A = \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{bmatrix}$، و ماتریس $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ حاصل از تعویض

ستونهای دوم و سوم ماتریس همانی باشد، آنگاه

$$AE = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

همان ماتریس حاصل از تعویض ستونهای دوم و سوم ماتریس A است.

گزارهٔ ۲ فرض می‌کنیم ماتریس مقدماتی E با ضرب ستون iام ماتریس همانی در یک اسکالر غیرصفر α به‌دست آمده باشد. حاصلضرب AE، ماتریس حاصل از ضرب ستون iام ماتریس A در اسکالر α و ثابت نگهداشتن ستونهای دیگر آن است.

اثبات واضح است که ستون iام E عبارت از $\alpha\mathbf{e}_i$ است، حال آنکه ستون kام E، به ازای $k \neq i$، عبارت است از $\mathbf{e}_k$. لذا، $E\mathbf{e}_i = \alpha\mathbf{e}_i$ و به ازای $k \neq i$، $E\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k$.

$$(AE)\mathbf{e}_k = A(E\mathbf{e}_k) = A\mathbf{e}_k = A_k \qquad \text{به‌ازای } k \neq i،$$

$$(AE)\mathbf{e}_i = A(E\mathbf{e}_i) = A(\alpha\mathbf{e}_i) = \alpha A\mathbf{e}_i = \alpha A_i$$

از اینجا دیده می‌شود که اگر $k \neq i$، A_k ستون kام AE است. ستون iام AE عبارت است از αA_i، یعنی، AE با ضرب ستون iام A در α به دست می‌آید. ●

به عنوان مثال، اگر $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، آنگاه

$AE = \begin{bmatrix} a_1 & xb_1 & c_1 \\ a_2 & xb_2 & c_2 \\ a_3 & xb_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ماتریس حاصل از ضرب ستون دوم A در x است.

گزارهٔ ۳ فرض می‌کنیم ماتریس مقدماتی E با افزودن α برابر ستون jام I_n به ستون iام I_n $(i \neq j)$، حاصل شده باشد. در این صورت ماتریس AE با افزودن α برابر ستون jام ماتریس A به ستون iام آن و ثابت نگهداشتن ستونهای دیگر A حاصل می‌شود.

اثبات واضح است که ستون kام E، $(k \neq i)$ عبارت از $\mathbf{e}_k$ و ستون iام آن عبارت از $\mathbf{e}_i + \alpha\mathbf{e}_j$ است. لذا،

$$E\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k \quad، \quad k \neq i$$

$$E\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i + \alpha\mathbf{e}_j$$

بنابراین

$$(AE)\mathbf{e}_k = A(E\mathbf{e}_k) = A\mathbf{e}_k = A_k, \ k \neq i$$

$$(AE)\mathbf{e}_i = A(E\mathbf{e}_i) = A(\mathbf{e}_i + \alpha\mathbf{e}_j) = A_i + \alpha A_j$$

ازاینرو دیده می‌شود که ستون kام AE $(k \neq i)$ عبارت از A_k است، وستون iام عبارت از $A_i + \alpha A_j$ می‌باشد. در نتیجه AE را می‌توان با افزودن α برابر ستون jام A به ستون iام آن به دست آورد. ●

به عنوان مثال، اگر $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$، و ماتریس $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ از افزودن α برابر ستون اول به ستون سوم ماتریس همانی حاصل شده باشد، آنگاه

$$AE=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1+\alpha a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+\alpha a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+\alpha a_3 \end{bmatrix}$$

همان ماتریس حاصل از افزودن α برابر ستون اول A به ستون سوم آن است.

گزاره‌های ۱، ۲، و ۳ را می‌توان در قاعدهٔ زیر با هم ترکیب کرد: ضرب ماتریس مقدماتی E در ماتریس A از سمت راست، عملی روی A است که از نوع عمل انجام‌شده برای به دست آوردن E از ماتریس همانی است.

به عنوان نتیجه‌ای از گزاره‌های ۱، ۲، و ۳ داریم:

قضیهٔ ۳ هر ماتریس مقدماتی وارون پذیر است و وارون آن ماتریسی مقدماتی است.

اثبات (الف) فرض‌کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض ستونهای i و j ماتریس همانی ($i<j$) باشد. در این صورت EE، ماتریس حاصل از ضرب E در E از سمت راست، ماتریسی است‌که ازتعویض ستونهای iام و jام E به‌دست می‌آید. پس $EE=I_n$. بنابراین E وارون پذیر است و وارون آن E است، که خود ماتریس مقدماتی می‌باشد،

(ب) فرض کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب ستون i ام ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر α باشد. در این صورت E^{-1} همان ماتریس حاصل از ضرب ستون iام ماتریس همانی در اسکالر α^{-1} است.

(ج) فرض‌کنیم E ماتریس مقدماتی حاصل از افزودن α برابر ستون jام ماتریس همانی به ستون iام آن باشد. دراین صورت، E^{-1} ماتریس حاصل از افزودن $(-\alpha)$ برابر ستون jام ماتریس همانی به ستون iام آن خواهد بود. ●

مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به‌طریقی مشابه می‌توان نتیجهٔ ضرب یک ماتریس مقدماتی $m\times m$ مانند E را در ماتریس $m\times n$ای مثل A از سمت چپ، یعنی تشکیل حاصلضرب EA را، تعیین کرد. تذکر اینکه، ماتریس حاصل از تعویض دو سطر از ماتریس همانی یا ضرب یک سطر آن در یک اسکالر غیر صفر یا افزودن مضرب اسکالری از یک سطر به سطر دیگر، باز یک ماتریس مقدماتی است.

(الف′) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از تعویض سطرهای i و j ماتریس همانی باشد، EA از تعویض سطرهای i و j ماتریس A به دست می‌آید.

(ب') اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب سطر iام ماتریس همانی در یک اسکالر غیر صفر α باشد، EA از ضرب سطر iام ماتریس A در اسکالر α به دست می‌آید.

(ج') اگر E ماتریس مقدماتی حاصل ازافزودن α برابر سطر jام ماتریس همانی به سطر iام آن $(i \neq j)$ باشد، آنگاه ماتریس EA از افزودن α برابر سطر jام ماتریس A به سطر iام آن به دست می‌آید.

به عنوان مثال، دیده می‌شود که

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 & \alpha c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+\alpha a_3 & b_1+\alpha b_3 & c_1+\alpha c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

در مورد ماتریس A، گاهی واژهٔ **خط** را به‌معنی سطر یا ستون A به‌کار می‌بریم. هر یک از تبدیلات زیر را یک **عمل مقدماتی** روی ماتریس A می‌نامیم.

(۱) تعویض دو خط موازی A

(۲) ضرب یک خط A در یک مقدار ثابت غیرصفر.

(۳) افزودن مضرب اسکالری از یک خط A به خط دیگری موازی با آن.

در بالا دیده‌ایم که هر عمل مقدماتی روی A را می‌توان از طریق ضرب A در سمت چپ یا راست یک ماتریس مقدماتی مناسب انجام داد. هدف از معرفی اعمال مقدماتی، تسهیل فرایند محاسبهٔ رتبهٔ ماتریس است. اهمیت اعمال مقدماتی در فرایند مزبور اساساً از قضیهٔ زیر ناشی می‌شود.

قضیهٔ ۴ فرض کنیم A و A' دو ماتریس $m \times n$ باشند و فرض کنیم A' توسط یک عمل مقدماتی روی A حاصل شده باشد. در این صورت $r(A) = r(A')$.

اثبات چون A'، ماتریس حاصل از انجام یک عمل مقدماتی روی A است، داریم $A' = EA$، یا $A' = AE$، که درآن E یک ماتریس مقدماتی مناسب است. چون بنا به قضیهٔ ۳ فوق، هرماتریس مقدماتی وارون‌پذیراست، و ازآنجا که، طبق قضیهٔ ۲، ضرب یک ماتریس وارون‌پذیر در A، رتبهٔ آن را عوض نمی‌کند، دیده می‌شود که $r(A')=r(A)$. ●

اگر ماتریس B را بتوان توسط رشته‌ای متناهی از اعمال مقدماتی روی ماتریس A

به دست‌آورد، گوییم ماتریسهای A و B هم‌ارزاند و می‌نویسیم $A \sim B$. بنا به‌قضیهٔ ۴، $A \sim B$ نتیجه می‌دهد $r(A) = r(B)$. به خواص هم ارزی زیر توجه کنید:

(۱) $A \sim A$.
(۲) $A \sim B$ نتیجه می‌دهد $B \sim A$.
(۳) $A \sim B$ و $B \sim C$ نتیجه می‌دهند $A \sim C$.

خاصیت اول واضح است. برای اثبات (۲)، متذکر می‌شویم که اگر $A \sim B$، ماتریسهای مقدماتی E_1، E_2، ...، E_m و F_1، F_2، ...، F_n وجود دارند به طوری که $B = E_1 E_2 \cdots E_m A F_1 F_2 \cdots F_n$. بنابراین،

$$A = E_m^{-1} E_{m-1}^{-1} \cdots E_1^{-1} B F_n^{-1} F_{n-1}^{-1} \cdots F_1^{-1}.$$

چون وارون یک ماتریس مقدماتی باز ماتریسی مقدماتی است، بنا به قضیهٔ ۳، می‌بینیم که A را می‌توان توسط اعمال مقدماتی روی B به دست آورد و لذا $B \sim A$. خاصیت (۳) می‌گوید که اگر B توسط اعمال مقدماتی روی A و C توسط اعمال مقدماتی روی B حاصل شوند، آنگاه C را می‌توان با انجام اعمال مقدماتی روی A به دست آورد.

به عنوان مثالی از موارد استفادهٔ اعمال مقدماتی داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ دو برابر ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ ستون اول را به ستون سوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ (۱ —) برابر ستون دوم را به ستون سوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ (۳ —) برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

(۸ —) برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم.

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای فضای مقادیر ماتریس اخیر است، دیده می‌شود که رتبهٔ این ماتریس ۲ است. چون ماتریسهای هم ارز دارای رتبهٔ یکسان‌اند، رتبهٔ ماتریس اولی، و در حقیقت رتبهٔ تمام ماتریسهای وسطی هم، ۲ است.

با استفاده از روشی مشابه با روش حذفی گاوسی و برآمده از مثال قبل، می‌توان نشان داد که هر ماتریسی، هم ارز با یکی از ماتریسهای

$$I_r \text{ ،} \left[\begin{array}{c:c} I_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \text{ ،} \left[\begin{array}{c:c} I_r & 0 \end{array}\right] \text{ ،} \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

است.

I_r ماتریس همانی از مرتبهٔ r است و ۰ نمایشگر یک بلوک صفر می‌باشد. این هم‌ارزی ممکن است با روش زیر حاصل شود:

(۱) با استفاده از تعویض سطرها و ستونها، یک درایهٔ غیر صفر (که بهتر است یک باشد) در اولین سطر و ستون به دست‌آوریم.

(۲) ستون اول را بر این درایه تقسیم کنیم.

(۳) با افزودن مضرب مناسبی از ستون اول به هر یک از دیگر ستونها و سپس با افزودن مضرب مناسبی از سطر اول به دیگر سطرها، ماتریسی به صورت زیر به دست می‌آوریم که هم ارز با ماتریس اولی است:

$$\left[\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots & \\ 0 & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

(۴) همان اعمال را روی زیرماتریس

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تکرار می‌کنیم.

(۵) همان طور که گفته شد، یکی از ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} I_r \\ \hdashline ۰ \end{bmatrix}،\ [I_r \;\vdots\; ۰]،\ \left[\begin{array}{c:c} I_r & ۰ \\ \hdashline ۰ & ۰ \end{array}\right] \text{ و } I_r$$

به دست می‌آید.

چون $\mathbf{e}_۱$، $\mathbf{e}_۲$، ...، $\mathbf{e}_r$ پایه‌ای برای فضای مقادیر هر یک از ماتریسهای اخیر است، واضح است که رتبهٔ هر یک از این ماتریسها r است. گویند این‌گونه ماتریسها **به صورت نرمال** هستند. پس، هرماتریس هم‌ارز با ماتریسی به‌صورت نرمال است.

مثال ۱ رتبهٔ ماتریس زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۳ & ۷ \\ -۱ & -۳ & -۱ & -۵ \\ ۷ & ۰ & ۲ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

↓ ستونهای اول و دوم را با هم تعویض می‌کنیم.

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ & ۷ \\ -۳ & -۱ & -۱ & -۵ \\ ۰ & ۷ & ۲ & ۹ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

↑ مضارب مناسبی از ستون اول را به دیگر ستونها می‌افزاییم.

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۸ & ۸ & ۱۶ \\ ۰ & ۷ & ۲ & ۹ \\ ۱ & -۳ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

↓ مضارب مناسبی از سطر اول را به دیگر سطرها می‌افزاییم.

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۸ & ۱۶ \\ ۰ & ۷ & ۲ & ۹ \\ ۰ & -۳ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

↓ ستونهای دوم و سوم را باهم وسپس سطرهای دوم و پنجم را با هم تعویض می‌کنیم.

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۷ & ۹ \\ ۰ & ۰ & -۳ & -۳ \\ ۰ & ۸ & ۸ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

مضارب مناسبی از ستون دوم را به هر یک از ستونهای دیگر می‌افزاییم. سپس، مضارب مناسبی از سطر دوم را به سایر سطرها اضافه می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۳ & -۳ \\ ۰ & ۰ & -۸ & -۸ \end{bmatrix}$$

(۱ —) برابر ستون سوم را به ستون چهارم می‌افزاییم.

$$\downarrow$$

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۸ & ۰ \end{bmatrix}$$

سطر سوم را در ۱/۳ ضرب می‌کنیم و مضارب مناسبی از آن را به هریک از سطرهای دیگر اضافه می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\sim\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس رتبهٔ ماتریس اولی ۳ است.

این روش محاسباتی که برای محاسبهٔ رتبهٔ ماتریس به کار رفت، در حل مسائل دیگری نیز که با بعد سر و کار دارند، قابل استفاده است.

مثال ۲ بعد فضای جوابهای دستگاه معادلات خطی همگن زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ + x_۵ &= ۰ \\ -۳x_۱ + x_۲ + ۷x_۳ - x_۴ + x_۵ &= ۰ \\ -۲x_۱ + ۳x_۲ + ۴x_۳ \qquad + ۲x_۵ &= ۰ \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، می‌خواهیم بعد فضای پوچ تبدیل خطی $T:\mathbf{R}^۵ \to \mathbf{R}^۳$ را بیابیم. می‌توان نوشت

$$T\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۱ & ۱ \\ -۳ & ۱ & ۷ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & ۴ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \\ x_۵ \end{bmatrix}$$

چون $\dim R_T + \dim N_T = 5$، برای تعیین $\dim N_T$ کافی است رتبهٔ T را، که رتبهٔ ماتریس زیر است، تعیین کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 7 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مضارب مناسبی از ستون اول را به هریک از ستونهای دیگر اضافه می‌کنیم.

$$\downarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مضارب مناسبی از سطر اول را به هر یک از سطرهای دیگر می‌افزاییم.

$$\downarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

(-1) برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ستون دوم را در $1/7$ ضرب می‌کنیم وسپس مضارب مناسبی از آن را به ستونهای دیگر اضافه می‌کنیم

$$\downarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا، $r(T) = 2$. بنابراین $\dim N_T = 3$.

مثال ۳ بعد زیر فضایی از $\mathbf{R}^4$ را که توسط بردارهای

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

پدید می‌آید می‌یابیم. ملاحظه می‌کنیم، زیرفضایی از $\mathbf{R}^4$ که توسط این سه بردار پدید می‌آید دقیقاً فضای ستونی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

است. بنابراین، کافی است که $r(A)$ را معین کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس، مجموعهٔ بردارهای داده شده، فضایی با بعد ۲ را پدید می‌آورد.

با استفاده از روش تبدیل به صورت نرمال، قضیهٔ ۵ را به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۵ فرض کنیم A ماتریس $m \times n$ ای با رتبهٔ r، و N ماتریس $m \times n$ ای با رتبهٔ r به صورت نرمال باشد. دراین صورت، ماتریسهای $m \times m$ مقدماتی، E_1، E_2، ...، E_k و ماتریسهای $n \times n$ مقدماتی F_1، F_2، ...، F_l وجود دارند به نحوی که

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k N F_1 F_2 \cdots F_l .$$

اثبات می‌دانیم که $A \sim N$. لذا، ماتریسهای $m \times m$ مقدماتی G_1، G_2، ...، G_k و ماتریسهای $n \times n$ مقدماتی H_1، H_2، ...، H_l وجود دارند به قسمی که

$$N = G_1 G_2 \cdots G_k A H_1 H_2 \cdots H_l$$

یا

$$A = G_k^{-1} \cdots G_1^{-1} N H_l^{-1} \cdots H_1^{-1}$$

چون بنا به‌قضیهٔ ۳، وارون یک ماتریس مقدماتی، یک ماتریس مقدماتی است، با تغییر نام H_1^{-1}، H_2^{-1}، ...، H_l^{-1} و G_1^{-1}، G_2^{-1}، ...، G_k^{-1}، نتیجهٔ مطلوب‌را به دست‌می‌آوریم. ●

نتیجهٔ ۱ هر دو ماتریس که دارای رتبه‌های مساوی باشند، هم ارزند.

اثبات اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ با رتبهٔ r باشند، آنگاه

$$B = G_1 \cdots G_p N H_1 \cdots H_q \quad \text{و} \quad A = E_1 \cdots E_k N F_1 \cdots F_l$$

(E_i، F_i، G_i و H_i ماتریسهای مقدماتی‌اند). پس

$$G_1 \cdots G_p E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} A F_l^{-1} \cdots F_1^{-1} H_1 \cdots H_q = B$$

بنابراین A و B هم ارزند. ●

نتیجهٔ ۲ هر ماتریس وارون پذیر $n \times n$ را می‌توان به حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی تجزیه کرد.

اثبات چون A وارون‌پذیراست، رتبهٔ آن n است وصورت نرمال آن‌همان ماتریس I_n است. از اینرو، ماتریسهای مقدماتی E_1، E_2، . . .، E_k، و F_1، F_2، . . .، F_l وجود دارند به قسمی که $A = (E_1 E_2 \cdots E_k) I_n (F_1 F_2 \cdots F_l)$. ●

تمرینات

۱. رتبهٔ هریک از ماتریسهای زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \\ 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

(ه) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

۲. بعد فضای جوابهای هریک از دستگاههای معادلات خطی همگن زیر را معین کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} -7x + 2y - 3z &= 0 \\ x + 3y + 5z &= 0 \\ -2x - y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

۳. وارون هریک از ماتریسهای مقدماتی زیر را بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، $\alpha \neq 0$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴. هریک از ماتریسهای زیر را به صورت حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی بنویسید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

۵. اگر A ماتریس $n \times n$ ای باشد، نشان دهید که ماتریسهای وارون پذیر B و C وجود دارند به طوری که

(الف) AB پایین مثلثی است.
(ب) CA بالا مثلثی است.

۶. اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times p$ باشند، نشان دهید که

$$r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B)).$$

۷. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، نشان دهید که ماتریس وارون پذیر $m \times m$ ای مانند B و ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای مانند C وجود دارند به نحوی که BAC ماتریسی به صورت نرمال است.

۸. به دو طریق مختلف ثابت کنید که ضرب از راست ماتریس A دریک ماتریس‌مقدماتی E، عملی است مقدماتی روی A، از همان نوع توصیف شده درمتن
(الف) ازاین مطلب که ترانهاد یک ماتریس مقدماتی، ماتریسی مقدماتی است و از تساوی $(EA)^T = A^T E^T$، استفاده کنید.
(ب) از یک پایهٔ متعارف برای فضای nبردارهای سطری استفاده کنید.

۹. اگر A ماتریس $m \times n$ ای باشد، نشان دهید که $r(A) = r(A^T)$.

۱۰. فرض کنید A ماتریس $(۲n + ۱) \times (۲n + ۱)$ زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ \\ & & & \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $r(A) = n + ۱$.

۱۱. فرض کنید A ماتریسی از مرتبهٔ $۲n$ باشد که از تعویض سطر ۱ با سطر ۲، سطر ۳ با سطر ۴، ...، سطر $۲n - ۱$ با سطر $۲n$ ماتریس همانی به‌دست آمده است. نشان دهید که $A^{-۱} = A$.

۱۲. فرض کنید A ماتریس $m \times n$ ای باشد و H زیرفضایی از $\mathbf{R}^n$ که توسط ستونهای A پدید می‌آید و K زیرفضایی از $\mathbf{R}^m$ که توسط سطرهای A پدید می‌آید. نشان دهید که $\dim H = \dim K$. [راهنمایی: از تمرین ۹ استفاده کنید.]

۱۳. اگر A ماتریس $m \times n$ ای با رتبهٔ $r(A)$ باشد و $۰ \leqslant k \leqslant r(A)$، نشان دهید که ماتریس $m \times m$ ای مانند B وجود دارد به طوری‌که $r(BA) = k$ و ماتریس $n \times n$ ای مانند C وجود دارد به قسمی که $r(AC) = k$.

۱۴. بعد زیرفضایی از $\mathbf{R}^n$ را بیابید که توسط هریک از مجموعه‌های بردارهای زیر پدید می‌آید.

(الف) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۵. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

(الف) $r(A) = r(B)$.

(ب) ماتریس $m \times m$ ای مانند C و ماتریس $n \times n$ ای مانند D، که هر دو وارون پذیرند، وجود دارند به نحوی که $A = CBD$.

۱۶. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، نشان دهید که احکام زیر هم‌ارزند.

(الف) فضاهای مقادیر A و B، به‌عنوان زیرفضاهایی از $\mathbf{R}^m$، مساوی‌اند.

(ب) ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای مانند C وجود دارد به‌طوری‌که $A = BC$.

۱۷. اگر A ماتریس $m \times n$ ای با این خاصیت باشد که هر r تا از ستونهای آن مستقل خطی و هر $r + 1$ تای آنها وابستهٔ خطی‌اند، نشان دهید که $r(A) = r$.

۱۸. نشان دهید که هرماتریس مربعی با رتبهٔ r، حاصلجمع r ماتریس با رتبهٔ ۱ است.

۱۹. نشان دهید که هرماتریس وارون پذیر 2×2 را می‌توان به صورت حاصلضرب ماتریسهایی به شکل

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوشت.

۲۰. دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

را درنظر بگیرید. نشان دهید که‌این دستگاه دارای جواب‌است اگر و فقط اگر رتبهٔ‌ماتریس

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ & & \vdots & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

با رتبهٔ ماتریس زیر یکی باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} & y_۱ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} & y_۲ \\ & & \vdots & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

۲۱. فرض‌کنید $A_i x + B_i y + C_i = ۰$، (به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, k$) مجموعه‌ای از k خط باشد. نشان دهیدکه این‌خطوط دریک نقطه تلاقی می‌کنند، یا باهم‌موازی‌اند، اگر و فقط اگر رتبهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_۱ & B_۱ & C_۱ \\ A_۲ & B_۲ & C_۲ \\ & \vdots & \\ A_k & B_k & C_k \end{bmatrix}$$

کمتر از ۲ یا مساوی با ۲ باشد.

۲۲. رتبهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & x & x \\ x & ۱ & x \\ x & x & ۱ \end{bmatrix}$ را به عنوان تابعی از x معین کنید.

۶ یکریختی

فرض کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی ازفضای برداری V به فضای برداری W باشد. اگر T هم یک‌به‌یک و هم پوشا باشد، آن را **یکریختی** می‌نامند. به‌عبارت دیگر، T یکریختی است اگر $R_T = W$ و $N_T = ۰$.

مثال ۱ فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد و T_A عملگری خطی روی $\mathbf{R}^n$ که به صورت $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود.

گیریم A وارون‌پذیر باشد. دراین صورت بنا به مثال ۳ از بخش ۳.۵، T_A پوشاست و دربخش ۴.۵ دیدیم که یک به یک نیز هست. لذا، T_A یکریختی است.

از طرف دیگر، اگـر A وارون پذیر نباشد، $\det A = ۰$ و بنا به قضیهٔ ۲ از بخش ۹.۴، $A\mathbf{x} = ۰$ دارای جواب غیرصفر است. پس T_A یک به یک نیست.

درنتیجه، T_A یکریختی است اگر و فقط اگر A وارون پذیر باشد.

مثال ۲ تبدیل خطی T از $\mathbf{R}^۳$ بـه $P_۲$ را کـه بـه صورت $T(\mathbf{e}_۱) = ۱$، $T(\mathbf{e}_۲) = x$، و

$T(\mathbf{e}_3) = x^2$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ بخش ۲.۵، چنین تبدیل خطیی وجود دارد. طبق تعریف T،

$$T(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3) = a + bx + cx^2$$

از اینرو T یک به یک و پوشاست، و بنابراین T یک یکریختی از $\mathbf{R}^3$ به P_2 است.

مثال ۳ در فصل ۲، بردارهای $\mathbf{R}^3$ را به دو طریق مختلف تعریف کردیم: جبری و هندسی. این بردارها را درتعریف‌جبری به صورت ستونهایی ازاعداد و درتعریف هندسی به‌صورت پاره خطهای جهت‌داری که از مبدأ شروع می‌شوند، در نظر گرفتیم. براساس تعریف جبری بردارها، قواعدی جبری برای جمع برداری و ضرب اسکالر ارائه دادیم. براساس تعریف هندسی، جمع برداری را به وسیلهٔ قانون متوازی‌الاضلاع تعریف کردیم و ضرب اسکالر را به عنوان بزرگسازی علامت‌دار طول درنظر گرفتیم.

حال تبدیل T را ازفضای بردارهای ستونی به فضای پاره خطهای جهت‌داری که از مبدأ شروع می‌شوند بررسی می‌کنیم، یعنی $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \mathbf{v}(x, y, z)$ را. به عبارت دیگر، تبدیل T به‌یک بردار ستونی با مؤلفه‌های x، y، و z، پاره‌خط جهت‌داری را که در نقطهٔ (x, y, z) ختم می‌شود نسبت می‌دهد. به علت وجود تناظر بین سه تایی‌های مرتب اعداد حقیقی و نقاط فضا، تبدیل T یک به یک و پوشاست. دربخش ۲.۲ دیدیم که

$$\mathbf{v}(x, y, z) + \mathbf{v}(x', y', z') = \mathbf{v}(x + x', y + y', z + z')$$

و

$$\alpha\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

بااستفاده ازتبدیل T که دربالا تعریف‌شد، این مطلب را دوباره تفسیرمی‌کنیم. داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$$

و

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \alpha T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$$

به‌عبارت دیگر، T تبدیلی خطی از بردارهایی که به‌طور جبری تعریف شده‌اند به بردارهایی که به‌طور هندسی تعریف شده‌اند، تعریف می‌کند. چون T یک به یک و پوشاست، پس یکریختی است.

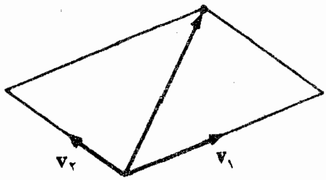
به علت‌وجود این تناظر بین بردارهایی که به صورت جبری تعریف شده‌اند وآنهایی که تعریف هندسی دارند، قرار براین می‌گذاریم که بردارهای جبری و هندسی را هم ارز با هم درنظر بگیریم. وجود این تناظر به روشن شدن مفهوم اصلی یکریختی کمک می‌کند.

واژهٔ «یکریختی» از واژه‌های «یک» و «ریخت = صورت» گرفته شده است. در اینجا این سؤال مناسب پیش می‌آید که چرا دوفضا دارای «یک صورت» هستند. دو فضا بدین مفهوم دارای یک صورت‌اند که T تناظر یک به یکی القا می‌کند که دو تعریف جمع برداری و ضرب اسکالر را هم‌ارز می‌سازد. با استفاده ازاین هم ارزی، می‌توانیم قضایا را در هر فضایی که مناسبتر باشد ثابت کنیم و از یکریختی برای انتقال قضایا به‌فضا های دیگر استفاده کنیم، و بدین وسیله تناظری بین احکام جبری وهندسی برقرار سازیم.

برای مثال، به‌واسطهٔ یکریختی T، دوحکم هندسی وجبری زیر هم ارزند:

(الف) اگر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ دو پاره‌خط جهت دار ناهمخط در صفحه باشند که از مبدأ شروع می‌شوند، آنگاه هر پاره‌خط جهت‌دار درصفحه که ازمبدأ شروع شود قطر متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع مجاورش روی خطوط معین شده توسط امتدادهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ قرار دارند.

(ب) اگر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بردارهایی مستقل خطی در $\mathbf{R}^2$ باشند، ترکیبات خطی آنها فضای $\mathbf{R}^2$ را پدید می‌آورند. (ر. ک. شکل ۱۱۰۵.)



شکل ۱۱۰۵

تبدیل $T: V \longrightarrow W$، در حالتی که یکریختیی بین دو فضای برداری باشد، اعمال جبری در V را هم ارز با اعمال جبری در W می‌سازد. قضیهٔ بعدی به بیان دقیقتر این حکم کمک می‌کند.

قضیهٔ ۱ فرض کنیم $T: V \longrightarrow W$ یکریختیی بین دو فضای برداری باشد. در این صورت،

(الف) اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ در V مستقل خطی باشند، $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ در W مستقل خطی‌اند.

(ب) اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ فضای V را پدیدآورند، $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ فضای W را پدید می‌آورند.

(ج) اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V تشکیل دهند، $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(د) $\dim V = \dim W$.

اثبات (الف) فرض کنیم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ در V مستقل خطی باشند. اگر درفضای W، $\alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n) = 0$، آنگاه بنا به خطی بودن T، $T(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) = 0$. چون T یک به یک است، داریم $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0$. از آنجا که $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ در V مستقل

خطی‌اند، $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. پس، تساوی

$$\alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n) = 0$$

ایجاب می‌کندکه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. درنتیجه $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ در W مستقل خطی‌اند.

(ب) فرض کنیم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ فضای V را پدید آورند و $\mathbf{y}$ برداری در W باشد. چون T پوشاست، بردار xای در V وجود دارد به‌طوری که $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. از آنجا که $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، و $\mathbf{x}_n$ فضای V را پدید می‌آورند، اسکالرهای α_1، α_2، ...، α_n وجود دارند به نحوی که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. لذا

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) &= T(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n)\\ &= \alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2) + \dots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n)\end{aligned}$$

پس، اگر $\mathbf{y}$ متعلق به W باشد، ترکیبی خطی از $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ است. بنابراین $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ فضای W را پدید می‌آورند.

(ج) فرض کنیم $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V باشد. بنا به (الف)، $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ در W مستقل خطی‌اند و بنا به (ب)، $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، و $T(\mathbf{x}_n)$ فضای W را پدید می‌آورند. بنابراین $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهد.

(د) اگر $\dim V = n$، آنگاه پایه‌ای، مثلاً $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$، با n عنصر برای V وجود دارد. چون $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ پایه‌ای با n عنصر برای W است، دیده می‌شود که $\dim V = \dim W$. ●

دربررسی این امر که یک تبدیل خطی یکریختی هست یا نه، در نظر داشتن حکم زیر ممکن است مفید باشد.

فرض می‌کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری متناهی‌البعد باشد به‌قسمی که $\dim V = \dim W$. دراین صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) T یکریختی است.
(۲) T یک به یک است.
(۳) T پوشاست.

این حکم را ثابت می‌کنیم. واضح است که اگر T یکریختی باشد، یک به یک و پوشاست. پس فرض می‌کنیم T یک به یک باشد. در این صورت، $N_T = 0$. چون $\dim N_T + \dim R_T = \dim V$، نتیجه می‌شود که $\dim R_T = \dim V$. از آنجا که $\dim V = \dim W$، داریم $\dim R_T = \dim W$. چون R_T زیرفضایی از W است، $R_T = W$ و T پوشاست.

همین طور، اگر T پوشا باشد، $\dim R_T = \dim W = \dim V$. از تساوی $\dim N_T + \dim R_T = \dim V$ نتیجه می‌شود که $\dim N_T = ۰$. لذا، $N_T = ۰$ و T یک به یک است.

پس، در بررسی این امر که یک عملگر خطی یکریختی هست یا نه، کافی است که یکی ازموارد یک به یک بودن یا پوشا بودن را دربارهٔ آن تحقیق کنیم.

مثال ۴ تبدیلی خطی از P_n به P_n را که به صورت $H(f) = f + f'$ (f' مشتق f است) تعریف می‌شود، درنظر می‌گیریم.

دراین مورد، بآسانی دیده می‌شود که H خطی است. می خواهیم نشان دهیم که H یکریختی است. بنا به‌آنچه هم اکنون نشان داده‌ایم، کافی است ثابت کنیم که H یک به‌یک است.

پس فرض می‌کنیم $H(f) = ۰$. در این صورت $f + f' = ۰$. از اینرو $f' = -f$. اگر f یک چند جمله‌ای غیرصفر از درجهٔ k باشد، آنگاه f' یک چند جمله‌ای از درجهٔ $k - ۱$ است. از این قرار، اگر $f \neq ۰$، ممکن نیست که f مساوی با f' باشد. بنابراین $f = ۰$ و H یک به یک است. درنتیجه H یکریختی است.

از قضیهٔ ۱ چنین برمی‌آید که اگر $f_۰$، $f_۱$، ...، f_n پایه‌ای برای P_n باشد، آنگاه $f_۰ + f'_۰$، $f_۱ + f'_۱$، ...، $f_n + f'_n$ پایهٔ دیگر آن است. برای مثال، ۱، x، $x^۲$، ...، x^n پایه‌ای برای P_n است. لذا،

$$۱،\ x + ۱،\ x^۲ + ۲x،\ \ldots،\ x^n + nx^{n-۱}$$

نیز پایه‌ای برای P_n است.

بنا به قضیهٔ ۱، اگر یکریختیی بین دوفضای برداری وجود داشته باشد، آنگاه بعد این دو فضای برداری یکی است. آنچه بیشتر جالب توجه است، آن است که اگر بعد دو فضای برداری مساوی باشد، آنگاه یکریختی بین آنها وجود دارد.

قضیهٔ ۲ فرض‌کنیم V و W دوفضای برداری حقیقی n بعدی باشند. دراین صورت یکریختیی بین V و W وجود دارد.

اثبات فرض می‌کنیم $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V باشد و $\mathbf{y}_۱$، $\mathbf{y}_۲$، ...، $\mathbf{y}_n$ پایه‌ای برای W. بنا به قضیهٔ بخش ۲.۵، یک تبدیل خطی T از V به W وجود دارد به قسمی که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$.

ادعا می‌کنیم که T یکریختی است. چون V و W دارای بعدمساوی‌اند، بنا به مطالب قبلی، کافی است نشان دهیم که T یک به یک است.

فرض کنیم $\mathbf{x}$ برداری در V باشد و $T(\mathbf{x}) = ۰$. ازآنجا که $\mathbf{x}_۱$، $\mathbf{x}_۲$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V است، اسکالرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n وجود دارند به نحوی که $\mathbf{x} = \alpha_۱\mathbf{x}_۱ + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$. دراین صورت:

$$T(\mathbf{x}) = T(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{x}_n) = 0$$

چون $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$، نتیجه می‌شود که $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n = 0$. از آنجا که $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...، $\mathbf{y}_n$ پایه‌ای برای W است، نتیجه می‌شود که $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. پس، $\mathbf{x} = 0$، و T یک به یک است. ●

اغلب وقتی یکریختیی بین دو فضای برداری وجود دارد، گوییم که این دو فضا یکریخت اند.

نتیجه اگر V یک فضای برداری n بعدی باشد، با $\mathbf{R}^n$ یکریخت است.

مفهوم این نتیجه آن است که یکریختیی از V به $\mathbf{R}^n$ وجود دارد. به‌همین معنی است که $\mathbf{R}^n$ الگویی برای فضاهای متناهی‌البعد حقیقی است. با استفاده از اثباتی شبیه به اثبات قضیهٔ ۲، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر دو فضای برداری n بعدی مختلط یکریخت‌اند و هر فضای برداری n بعدی مختلط با $\mathbf{C}^n$ یکریخت است.

قبلاً دیده‌ایم که فضای P_n فضایی برداری با بعد $n + 1$ است. بنابراین، P_n و $\mathbf{R}^{n+1}$ یکریخت‌اند. به همین نحو، دیده می‌شود که فضای ماتریسهای 2×2ی حقیقی، که بعدش ۴ است، با $\mathbf{R}^4$ یکریخت است.

تمرینات

۱. کدامیک از ماتریسهای زیر یکریختیی روی $\mathbf{R}^n$ القا می‌کند؟

(الف) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

۲. فرض کنید V فضایی برداری با پایهٔ $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ باشد. و T تابعی از V به $\mathbf{R}^n$ باشد که به هر بردار $\mathbf{x}$، n تایی مختصات آن نسبت به پایهٔ $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ را نسبت می‌دهد. نشان دهیدکه T یکریختیی از V به $\mathbf{R}^n$ است.

۳. فرض کنید P_e فضای برداری چندجمله‌ایهای زوج یک متغیره با متغیر x و از درجهٔ نابیشتر از $2n$ و P_o فضای برداری چندجمله‌ایهای فرد از درجهٔ نابیشتر از $2n + 1$ باشد. نشان دهید که تابع $T : P_e \to P_o$ که به صورت $T(f) = xf$ تعریف می‌شود یکریختیی از P_e برروی P_o است.

۴. نشان دهید که تابعی از فضای ماتریسهای $n \times n$ به خودش که A را به A^T می‌برد، یکریختی است.

۵. فرض کنید T نگاشتی از P_n به P_n باشد که به صورت

$$T(f) = f + \alpha_1 f' + \alpha_2 f'' + \cdots + \alpha_n f^{(n)}$$

(α_1، α_2، ...، α_n اعداد حقیقی‌اند) تعریف می‌شود. نشان دهید که T یکریختی است.

۶. فرض کنید A یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ باشد. نشان دهید که تبدیلات خطی زیر از فضای ماتریسهای $n \times n$ به خودش، یکریختی‌اند.

(الف) $T(B) = AB$ (ب) $T(B) = BA$

(ج) $T(B) = ABA$ (د) $T(B) = ABA^{-1}$

۷. فرض کنید $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری متناهی‌البعد باشد. نشان دهید که احکام زیر هم ارزند.

(الف) T یکریختی است.

(ب) اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، و $\mathbf{x}_n$ در V مستقل خطی باشند، آنگاه $T(\mathbf{x}_1)$، $T(\mathbf{x}_2)$، ...، و $T(\mathbf{x}_n)$ در W مستقل خطی‌اندواگر $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ...،و $\mathbf{y}_n$ فضای V راپدیدآورند، آنگاه $T(\mathbf{y}_1)$، $T(\mathbf{y}_2)$، ...، $T(\mathbf{y}_n)$ فضای W را پدید می‌آورند.

(ج) اگر $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای‌برای V باشد،آنگاه $T(\mathbf{x}_1)$،$T(\mathbf{x}_2)$، ...، $T(\mathbf{x}_n)$ پایه‌ای برای W است.

۸. نشان دهیدکه تبدیلی خطی روی P_n که $f(x)$ را به $f(x+\alpha)$ (α عددی است حقیقی) می‌برد یکریختیی روی P_n است.

۹. فرض کنید T یکریجتیی روی $\mathbf{R}^3$ باشد. نشان دهیدکه T صفحات گذرنده از مبدأ را به صفحاتی گذرنده از مبدأ و خطوط گذرنده از مبدأ را به خطوطی گذرنده از مبدأ می‌برد.

۱۰. یکریختیی بین فضای ماتریسهای 4×3 و فضای ماتریسهای 6×2 بسازید. در حالت کلی، چه وقت می‌توان یکریختیی بین فضای ماتریسهای $k \times l$ و فضای ماتریسهای $m \times n$ یافت؟

۱۱. نشان‌دهیدکه‌فضای ماتریسهای‌بالامثلثی با فضای ماتریسهای‌پایین مثلثی یکریخت‌است.

۱۲. نشان دهید که تابعی از اعداد مختلط (اینجا به عنوان یک فضای برداری حقیقی) به‌فضای‌ماتریسهای 2×2 به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$، که با ضابطهٔ $T(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود یکریختی است. نشان دهید که این یکریختی ضرب را حفظ می‌کند، یعنی،

$$T(a+bi)T(c+di) = T((a+bi)(c+di))$$

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری باشد و $\mathbf{t}$ برداری ثابت در V. اعمال جدیدی روی V به صورت

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{t} \quad \text{و} \quad \alpha * \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{t}$$

تعریف کنید. نشان دهید که V تحت اعمال $\oplus$ و $*$ فضایی برداری است. نشان دهید تابع $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ که V را به عنوان یک فضای‌برداری تحت اعمال $+$ و $\cdot$، به Vبه‌عنوان

یک فضای برداری تحت اعمال $\oplus$ و $*$ می‌برد، یکریختیی القا می‌کند.

۱۴. به ازای چه مقادیری از λ تابعی از P_n به P_n که به صورت $T(f) = \lambda f - xf'$ تعریف می‌شود یکریختیی روی P_n است؟

۱۵. فرض‌کنید $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\mathbf{x}_3$ مجموعه‌ای‌از بردارهای‌مستقل‌خطی در $\mathbf{R}^3$ باشد و $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، $\mathbf{y}_3$ مجموعهٔ دیگری از بردارهای مستقل خطی درهمین فضا وفرض‌کنید T عملگری خطی روی $\mathbf{R}^3$ باشد به طوری که $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ $(i = 1,2,3)$.

(الف) نشان دهید که T یکریختی است.

(ب) نشان دهید $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$، که در این رابطه A ماتریس 3×3 ی

$$[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3][\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]^{-1}$$

است که $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3]$ ماتریس 3×3 با ستونهای $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، $\mathbf{y}_3$ و $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$ ماتریس 3×3 با ستونهای $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، $\mathbf{x}_3$ است.

۱۶. کدام زوج از فضاهای زیر یکریخت‌اند؟

(الف) ماتریسهای متقارن کج 3×3 با درایه‌های حقیقی و $\mathbf{R}^3$.

(ب) ماتریسهای قطری $n \times n$ با درایه‌های حقیقی و P_n.

(ج) ماتریسهای متقارن $(n-1) \times (n-1)$ با درایه‌های حقیقی و ماتریسهای متقارن کج $n \times n$ با درایه‌های حقیقی.

۷ جبر تبدیلات خطی

در فصل ۲، جمع وضرب ماتریسها را مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به ارتباط نزدیک بین تبدیلات خطی و ماتریسها، جا دارد بپرسیم که آیا می‌توان اعمال مشابهی‌روی تبدیلات خطی انجام داد یا خیر. در این بخش، این‌قبیل اعمال را تعریف می‌کنیم و می‌بینیم که‌کاملاً مشابه با اعمال نظیر خود روی ماتریسها هستند.

اگر V و W دو فضای برداری باشند، خانوادهٔ تمام تبدیلات خطی از V به W را با $L(V$ و $W)$ نشان می‌دهیم. چند عمل جبری معمولی روی $L(V$ و $W)$ تعریف شده‌اند، که در این بخش مورد مطالعه قرار می‌گیرند. فرض کنیم T_1 و T_2 دو عضو $L(V$ و $W)$ باشند، یعنی تبدیلاتی خطی ازفضای برداری V به‌فضای‌برداری W باشند. **حاصلجمع** T_1 و T_2 را که با $T_1 + T_2$ نشان داده می‌شود به‌صورت $(T_1+T_2)(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})$ تعریف می‌کنیم.

برای اینکه تعریف فوق جالب باشد، حاصلجمع نیز باید یک تبدیل خطی باشد. برای اثبات‌اینکه واقعاً هم چنین است، فرض کنیم $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به V باشند. در این‌صورت

$$(T_1+T_2)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T_1(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + T_2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \qquad (\text{بنا به تعریف } T_1+T_2)$$
$$= T_1(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{y}) + T_2(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{y}) \qquad (\text{بنا به‌خطی‌بودن } T_1 \text{و} T_2)$$
$$= T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{y}) + T_2(\mathbf{y}) \qquad [\text{بنا به } (V1)]$$
$$= (T_1+T_2)(\mathbf{x}) + (T_1+T_2)(\mathbf{y}) \qquad (\text{طبق تعریف } T_1+T_2)$$

همین‌طور، اگر $\mathbf{x}$ متعلق به V و α یک اسکالر باشد، داریم

$$(T_1 + T_2)(\alpha\mathbf{x}) = T_1(\alpha\mathbf{x}) + T_2(\alpha\mathbf{x}) \qquad (\text{طبق تعریف } T_1 + T_2)$$
$$= \alpha T_1(\mathbf{x}) + \alpha T_2(\mathbf{x}) \qquad (\text{بنا به خطی بودن } T_1 \text{ و } T_2)$$
$$= \alpha(T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x})) \qquad [\text{بنا به } (V\,6)]$$
$$= \alpha(T_1 + T_2)(\mathbf{x}) \qquad (\text{بنا به تعریف } T_1 + T_2)$$

همچنین یک عمل معمولی ضرب اسکالر روی $L(V \text{ و } W)$ وجود دارد. اگر T متعلق به $L(V \text{ و } W)$ باشد، **مضرب اسکالر** T باضریب اسکالر α را که با αT نشان داده می‌شود، به صورت $(\alpha T)(\mathbf{x}) = \alpha(T(\mathbf{x}))$ تعریف می‌کنیم.

αT نیز یک تبدیل خطی است، زیرا اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعلق به V باشند،

$$\alpha T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha(T(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \qquad (\text{بنا به تعریف } \alpha T)$$
$$= \alpha(T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})) \qquad (\text{بنا به خطی بودن } T)$$
$$= \alpha T(\mathbf{x}) + \alpha T(\mathbf{y}) \qquad [\text{طبق } (V\,6)]$$
$$= (\alpha T)(\mathbf{x}) + (\alpha T)(\mathbf{y}) \qquad (\text{بنا به تعریف } \alpha T)$$

بعلاوه، اگر $\mathbf{x}$ برداری در V و β یک اسکالر باشد، داریم

$$(\alpha T)(\beta\mathbf{x}) = \alpha(T(\beta\mathbf{x})) \qquad (\text{بنا به تعریف } \alpha T)$$
$$= \alpha(\beta T(\mathbf{x})) \qquad (\text{بنا به خطی بودن } T)$$
$$= (\alpha\beta)(T(\mathbf{x})) \qquad [\text{طبق } (V\,7)]$$
$$= \beta(\alpha T(\mathbf{x})) \qquad [\text{بنا به } (V\,7)]$$
$$= \beta(\alpha T)(\mathbf{x}) \qquad (\text{طبق تعریف } \alpha T)$$

با استفاده از ترکیبات خطی تبدیلات خطی شناخته شده، می‌توانیم مثالهای متعددی از تبدیلات خطی بسازیم. با استفاده از قوانین فوق، بدون دردسر می‌توانیم خطی بودن تبدیلاتی را که به‌دست می‌آوریم تحقیق کنیم. بسیاری از مثالهایی که قبلاً ساختیم، از این طریق به دست آمده‌اند. برای مثال، در بخش قبلی، عملگری خطی روی P_n را بررسی کردیم‌که با ضابطهٔ $H(f) = f + f'$ تعریف شد. قبل از آن، تعریف کردیم $I(f) = f$ و $D(f) = f'$. از این قرار $H = I + D$. در نتیجه H خطی است. همین‌طور $K(f) = 3f - f'$ و $L(f) = f + 7f'$ عملگرهایی خطی روی P_n هستند.

با توجه به‌نماد گذاریی که انتخاب کرده‌ایم، احتمالاً انتظار قضیهٔ زیر را دارید:

قضیهٔ ۱ $L(V, W)$، با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری که در بالا تعریف شد، یک فضای برداری است.

اثبات فرض‌کنیم T_1، T_2 و T_3 اعضای $L(V, W)$، و α و β اسکالر باشند، و $\mathbf{x}$ برداری دلخواه در V باشد.

$(V\,1)$

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{x}) \qquad (\text{بنا به تعریف } T_1 + T_2)$$
$$= T_2(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{x}) \qquad [\text{با استفاده از } (V\,1) \text{ در } W]$$
$$= (T_2 + T_1)(\mathbf{x}) \qquad (\text{طبق تعریف } T_2 + T_1)$$

(V ۲)

$((T_1+T_2)+T_3)(\mathbf{x})=(T_1+T_2)(\mathbf{x})+T_3(\mathbf{x})$ [بنا به تعریف $(T_1+T_2)+T_3$]

$=(T_1(\mathbf{x})+T_2(\mathbf{x}))+T_3(\mathbf{x})$ (طبق تعریف T_1+T_2)

$=T_1(\mathbf{x})+(T_2(\mathbf{x})+T_3(\mathbf{x}))$ [بااستفاده از (V۲) در W]

$=T_1(\mathbf{x})+(T_2+T_3)(\mathbf{x})$ (طبق تعریف T_2+T_3)

$=(T_1+(T_2+T_3))(\mathbf{x})$ [بنا به‌تعریف $T_1+(T_2+T_3)$]

(V ۳)

فرض کنیم O نمایشگر تبدیل خطی صفر از V به W باشد، یعنی، عملگری که همهٔ بردارهای V را به ∘ می‌برد. در این صورت

$(O+T_1)(\mathbf{x})=O(\mathbf{x})+T_1(\mathbf{x})$ (بنا به تعریف $O+T_1$)

$=\circ+T_1(\mathbf{x})$ (طبق تعریف O)

$=T_1(\mathbf{x})$ [با استفاده از (V ۳) در W]

(V ۴)

به ازای $T\in L(V,W)$، منفی T را با ضابطهٔ $(-T)(\mathbf{x})=-(T(\mathbf{x}))$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$(T+(-T))(\mathbf{x})=T(\mathbf{x})+(-T)(\mathbf{x})$ [بنا به تعریف $T+(-T)$]

$=T(\mathbf{x})-T(\mathbf{x})$ [طبق تعریف $(-T)(\mathbf{x})$]

$=\circ$ [با استفاده از (V ۴) در W]

$=O(\mathbf{x})$ (بنا به تعریف عملگر صفر)

تحقیق صحت بقیهٔ خواص (V ۵)-(V ۸) بـه همین ترتیب است و از آن صرفنظر می‌کنیم. ●

مثال ۱ فرض کنیم A و B ماتریسهای $m\times n$ ای با درایه‌های حقیقی باشند و T_A و T_B تبدیلاتی خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ که با ضابطهٔ $T_A(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ و $T_B(\mathbf{x})=B\mathbf{x}$، به ازای هر $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$، تعریف شده‌اند. پس، نتیجه می‌شود که

$$(T_A+T_B)(\mathbf{x})=T_A(\mathbf{x})+T_B(\mathbf{x})=A\mathbf{x}+B\mathbf{x}=(A+B)\mathbf{x}$$
$$=T_{A+B}(\mathbf{x})$$

چون $\mathbf{x}$ برداری دلخواه در $\mathbf{R}^n$ است، نتیجه می‌شود کـه $T_A+T_B=T_{A+B}$. یعنی، عمل جمع تبدیـلات خطی نظیر جمع ماتریسها است. همین‌طور، بـآسانی ثـابت می‌شود کـه $\alpha T_A=T_{\alpha A}$. این، بدین معنی است که ضرب اسکالر تبدیلات خطی نظیـر ضرب اسکالر ماتریسها است.

فرض کنیم L نشانگر تابعی از M_{mn}، فضای ماتریسهای $m\times n$ با درایه‌های‌حقیقی، به $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ باشد کـه با ضابطهٔ $L(A)=T_A$ تعریف می‌شود. بـه عبارت دیگـر، L ماتریس A را به تبدیل خطی القا شده به وسیلهٔ ضرب بردارهای $\mathbf{R}^n$ در A، می‌برد. چون

$$L(A+B)=T_{A+B}$$

$$\begin{aligned} &= T_A + T_B \\ &= L(A) + L(B) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} L(\alpha A) &= T_{\alpha A} \\ &= \alpha T_A \\ &= \alpha L(A) \end{aligned}$$

دیده می‌شود که L خطی است.

در قضیهٔ ۲، از بخش ۲.۵، دیدیم که هر تبدیل خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ به وسیلهٔ ضرب بردارهای $\mathbf{R}^n$ در یک ماتریس مناسب $m \times n$ القا می‌شود. یعنی، به ازای هر تبدیل‌خطی $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$، ماتریسی مانند A وجود دارد به نحوی که $T = T_A$. به‌عبارت دیگر، تابع L از M_{mn} به $L(\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m)$ پوشاست.

تابع L یک به یک نیز هست. زیرا اگر $L(A) = 0$، آنگاه به ازای هر بردار $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$، $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = 0$. با فرض $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$، می‌بینیم که همهٔ ستونهای A صفرند و لذا $A = 0$.

پس، تابع L که دربالا تعریف شد، یکریختیی از فضای ماتریسهای $m \times n$ به‌فضای تبدیلات خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$، القا می‌کند.

همچنان که اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر تبدیلات خطی، مشابه همین اعمال روی ماتریسها هستند، روشی برای ترکیب تبدیلات خطی وجود دارد که نظیر ضرب ماتریسهاست.

فرض کنیم $T: U \to V$ و $S: V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند، که در آنها U، V، و W فضاهایی برداری اند. ترکیب S و T را که با $S \circ T$، یا برای سادگی فقط با ST، نشان می‌دهیم به صورت

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) \qquad \text{به ازای هر } \mathbf{x} \text{ در } U$$

تعریف می‌کنیم.

طبعاً انتظار داریم که ترکیب دو تبدیل خطی، تبدیلی خطی باشد. درواقع نیز چنین است، زیرا اگر $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ بردارهایی در V باشند، داریم:

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= S(T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)) && (\text{طبق تعریف } S \circ T) \\ &= S(T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2)) && (\text{بنا به خطی بودن } T) \\ &= S(T(\mathbf{x}_1)) + S(T(\mathbf{x}_2)) && (\text{بنا به خطی بودن } S) \\ &= (S \circ T)(\mathbf{x}_1) + S \circ T(\mathbf{x}_2) && (\text{طبق تعریف } S \circ T) \end{aligned}$$

همین‌طور، برای $\mathbf{x} \in U$ و اسکالر α، داریم

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\alpha \mathbf{x}) &= S(T(\alpha \mathbf{x})) && (\text{طبق تعریف } S \circ T) \\ &= S(\alpha T(\mathbf{x})) && (\text{بنا به خطی بودن } T) \end{aligned}$$

$= \alpha S(T(\mathbf{x}))$ (بنا به خطی بودن S)

$= \alpha(S\circ T)(\mathbf{x})$ (طبق تعریف $S\circ T$)

ازآنجا که ثابت‌کردیم شرایط (الف) و (ب) درتعریف تبدیل خطی، درمورد $S\circ T$ برقرارند، این تابع تبدیلی خطی از U به W است.

مثال ۲ در اینجا هدف ما این است که تناظر بین ترکیب تبدیلات خطی و ضرب ماتریسها را دقیقاً نشان دهیم.

فرض می‌کنیم $T_A: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ و $T_B: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ تبدیلاتی خطی باشند که بترتیب توسط ماتریس $n\times p$ ای مانند A و ماتریس $m\times n$ ای مانند B القا شده اند. یعنی $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (به ازای هر $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^p$)، و $T_B(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ (به ازای هر $\mathbf{y}$ در $\mathbf{R}^n$).

در این صورت به ازای هر $\mathbf{x}$ در $\mathbf{R}^n$،

$(T_B\circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x}))$ (بنا به تعریف $T_B\circ T_A$)

$= T_B(A\mathbf{x})$ (طبق تعریف T_A)

$= B(A\mathbf{x})$ (بنا به تعریف T_B)

$= (BA)\mathbf{x}$ (بنا به قانون انجمنی ضرب ماتریسها)

چون $\mathbf{x}$ دلخواه بود، داریم $T_B\circ T_A = T_{BA}$، که درآن T_{BA} تبدیل خطی القا شده توسط ماتریس $m\times p$ی BA است.

این تناظر طبیعی بین ترکیب توابع خطی و ضرب ماتریسها، غالباً به ما امکان می‌دهد که ضرب ماتریسی را به صورت هندسی تعبیر کنیم. برای مثال، عملگر T_θ از $\mathbf{R}^2$ به $\mathbf{R}^2$ را که در بخش ۱.۵ مورد بحث قرار گرفت، درنظر می‌گیریم. $T_\theta(\mathbf{v})$ به عنوان بردار حاصل از دوران یک بردار مفروض $\mathbf{v}$ به اندازهٔ θ درجه، تعریف شده بود. اگر θ_1 و θ_2 دو عدد باشند، ترکیب $T_{\theta_1}\circ T_{\theta_2}$ چیست؟

اگر $\mathbf{v}$ برداری درصفحه باشد، $T_{\theta_2}(\mathbf{v})$ از دوران $\mathbf{v}$ به اندازهٔ θ_2 درجه حاصل می‌شود. بنابراین $T_{\theta_1}(T_{\theta_2}(\mathbf{v}))$ از دوران $T_{\theta_2}(\mathbf{v})$ به اندازهٔ θ_1 درجه به دست می‌آید. پس رویهمرفته، $T_{\theta_1}(T_{\theta_2}(\mathbf{v}))$ بردار حاصل از دوران بردار $\mathbf{v}$ به اندازهٔ $\theta_1+\theta_2$ درجه است. به عبارت دیگر $T_{\theta_1}\circ T_{\theta_2} = T_{\theta_1+\theta_2}$.

چون

$$T_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

دیده می‌شود که

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

البته، این نتیجه را می‌توان مستقیماً از ضرب کردن دوماتریس نیز به دست آورد.

مثال ۳ درمثال ۳، ازبخش ۲.۵، مقدارکرباس وطناب مورد نیازیک کارخانهٔ چادرسازی‌را به‌عنوان تابعی ازتعدادهریک‌ازانواع چادرتولیدشده درنظرگرفتیم. درآن‌مثال، فرض‌کردیم $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ نمایشگر تعداد هریک از انواع چادر باشد. بنابراین

$$T(\mathbf{v})=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 30 \end{bmatrix}\mathbf{v},$$

برداری است که مقدار کرباس و طناب به‌کار رفته درتولید x_1 چادر ازنوع ۱، x_2 چادر از نوع ۲، و x_3 چادر از نوع ۳ را می‌دهد.

همچنین فرض می‌کنیم تولید کننده، کرباس و طناب مورد نیازش را از پنبه، کنف، و الیاف کتان بسازد. یک واحد کرباس احتیاج به ۵ واحد پنبه، ۲ واحد کنف، و ۳ واحد الیاف کتان دارد. یک واحد طناب احتیاج به یک واحد پنبه، ۲ واحد کنف، و ۰ واحد الیاف کتان دارد.

فرض کنیم $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ برداری‌باشدکه مؤلفه‌هایش‌مقدارکرباس وطناب تولیدشده‌اند دراین صورت $S(\mathbf{u})=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ برداری است‌که مؤلفه‌هایش، بترتیب، مقدار پنبه، کنف، و الیاف کتان مورد نیاز در تولید a واحد کرباس و b واحد طناب می‌باشند.

می‌خواهیم بردار پنبه، کنف، و الیاف‌کتان لازم‌را به عنوان تابعی ازبردار $\mathbf{v}$ محصول چادر بیابیم.

در این حالت، T، بردار $\mathbf{v}$ محصول چادر را به بردار $\mathbf{u}=T(\mathbf{v})$ کرباس و طناب مورد نیاز، تبدیل می‌کند. S بردار $\mathbf{u}$ کرباس و طناب لازم را به بردار $S(\mathbf{u})$ پنبه، کنف، و الیاف کتان مورد نیاز، تبدیل می‌کند. لذا، $S(T(\mathbf{u}))$، پنبه، کنف، و الیاف کتان مورد نیاز را به عنوان تابعی از $\mathbf{v}$ می‌دهد. پس، داریم

$$S(T(\mathbf{v}))=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 30 \end{bmatrix}\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 30 & 46 & 80 \\ 28 & 44 & 80 \\ 12 & 18 & 30 \end{bmatrix}\mathbf{v}$$

ازاین ماتریس، می‌توانیم مواد لازم برای تولید یک واحد از هرنوع چادر را با خواندن ستون مربوطه ازبالا به پایین، بیابیم. از اینرو، یک چادر از نوع ۲ احتیاج به ۴۶ واحد پنبه، ۴۴ واحد کنف، و ۱۸ واحد الیاف کتان دارد.

نقش تبدیل همانی در ترکیب تبدیلات خطی مشابه نقش ماتریس همانی در ضرب ماتریسهاست.

قضیهٔ ۲ فرض کنیم $T:V\to W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری V و W باشد و $I_V:V\to V$ و $I_W:W\to W$، بترتیب، تبدیلات خطی‌همانی روی V و W باشند. در این صورت

$$I_W\circ T = T \quad \text{و} \quad T\circ I_V = T$$

اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}$ برداری در V باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}(T\circ I_V)(\mathbf{x}) &= T(I_V(\mathbf{x})) && (\text{بنا به تعریف } T\circ I_V)\\ &= T(\mathbf{x}) && (\text{طبق تعریف } I_V)\end{aligned}$$

چون این مطلب به ازای هر $\mathbf{x}$ برقرار است، داریم $T\circ I_V = T$. اثبات $I_W\circ T = T$ نیز همین طور است. ●

اکنون، تحقیق می‌کنیم که ترکیب تبدیلات خطی درقانون انجمنی صدق می‌کند.

قضیهٔ ۳ فرض کنیم $T_1:V_1\to V_2$، $T_2:V_2\to V_3$، و $T_3:V_3\to V_4$ تبدیلاتی خطی باشند. (V_1، V_2، V_3، و V_4 فضاهایی برداری‌اند). دراین صورت

$$T_3\circ(T_2\circ T_1) = (T_3\circ T_2)\circ T_1$$

اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}$ برداری در V_1 باشد. پس

$$\begin{aligned}(T_3\circ(T_2\circ T_1))(\mathbf{x}) &= T_3((T_2\circ T_1)(\mathbf{x})) && [\text{بنا به تعریف } T_3\circ(T_2\circ T_1)]\\ &= T_3(T_2(T_1(\mathbf{x}))) && (\text{طبق تعریف } T_2\circ T_1)\\ &= (T_3\circ T_2)(T_1(\mathbf{x})) && (\text{بنا به تعریف } T_3\circ T_2)\\ &= ((T_3\circ T_2)\circ T_1)(\mathbf{x}) && [\text{طبق تعریف } (T_3\circ T_2)\circ T_1]\end{aligned}$$

چون به ازای هر $\mathbf{x}$ در V_1، $(T_3\circ(T_2\circ T_1))(\mathbf{x}) = ((T_3\circ T_2)\circ T_1)(\mathbf{x})$، پس ثابت می‌شود که $T_3\circ(T_2\circ T_1) = (T_3\circ T_2)\circ T_1$. ●

ازقضیهٔ ۳، چنین برمی‌آید که ضرب ماتریسها انجمنی‌است. زیرا اگر A_1، A_2، و A_3 ماتریسهایی با مرتبهٔ مناسب باشند، بنا به قضیهٔ ۳ داریم

$$T_{A_3}\circ(T_{A_2}\circ T_{A_1}) = (T_{A_3}\circ T_{A_2})\circ T_{A_1}$$

با استفادهٔ مکرر از $T_{AB} = T_A\circ T_B$، داریم

$$T_{A_3}\circ T_{A_2A_1} = T_{A_3A_2}\circ T_{A_1}$$

$$T_{A_3(A_2A_1)} = T_{(A_3A_2)A_1}$$

چون رابطهٔ $T_A = T_B$ ایجاب می‌کند که $A = B$، داریم $A_3(A_2A_1) = (A_3A_2)A_1$،

نتیجه‌ای که درفصل ۲، به روشی کاملاً متفاوت ثابت شد.

با توجه به رابطهٔ نزدیک بین ضرب ماتریسی و ترکیب تبدیلات خطی، طبیعی است که قوانین توزیعپذیری زیر نیز برقرار باشند.

قضیهٔ ۴ فرض‌کنیم $T_۱ : V_۱ \to V_۲$، $T'_۲ : V_۲ \to V_۳$، $T_۲ : V_۲ \to V_۳$، و $T_۳ : V_۳ \to V_۴$ تبدیلاتی خطی باشند ($V_۱$، $V_۲$، $V_۳$، و $V_۴$ فضاهایی برداری‌اند). دراین صورت

$$(T_۲ + T'_۲)\circ T_۱ = T_۲\circ T_۱ + T'_۲\circ T_۱$$

و

$$T_۳\circ(T_۲ + T'_۲) = T_۳\circ T_۲ + T_۳\circ T'_۲$$

اثبات فرض کنیم $\mathbf{x}$ برداری در $V_۱$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
&((T_۲ + T'_۲)\circ T_۱)(\mathbf{x}) \\
&\quad = (T_۲ + T'_۲)(T_۱(\mathbf{x})) && (\text{بنا به تعریف } (T_۲+T'_۲)\circ T_۱) \\
&\quad = T_۲(T_۱(\mathbf{x})) + T'_۲(T_۱(\mathbf{x})) && (\text{طبق تعریف } T_۲ + T'_۲) \\
&\quad = (T_۲\circ T_۱)(\mathbf{x}) + (T'_۲\circ T_۱)(\mathbf{x}) && (\text{بنا به تعاریف } T_۲\circ T_۱ \text{ و } T'_۲\circ T_۱) \\
&\quad = (T_۲\circ T_۱ + T'_۲\circ T_۱)(\mathbf{x}) && (\text{طبق تعریف } T_۲\circ T_۱ + T'_۲\circ T_۱)
\end{aligned}$$

چون تساوی فوق به ازای هر $\mathbf{x}$ در $V_۱$ برقرار است، پس ثابت می‌شود که

$$(T_۲ + T'_۲)\circ T_۱ = T_۲\circ T_۱ + T'_۲\circ T_۱$$

قانون توزیعپذیری دوم نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. ●

فرض کنیم $T : V \to V$ عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. توانهای T را به طریق معمولی تعریف می‌کنیم:

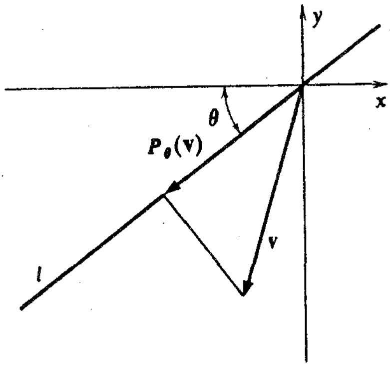
$$T^۲(\mathbf{x}) = T(T(\mathbf{x})),\ T^۳(\mathbf{x}) = T(T^۲(\mathbf{x})),\ \ldots,\ T^n(\mathbf{x}) = T(T^{n-۱}(\mathbf{x}))$$

به علت اینکه قانون انجمنی در اینجا صادق است، T^n، حاصل n بار ترکیب T با خودش است (صرفنظر از ترتیب انجام‌عمل ترکیب).

مثال ۴ فرض‌کنیم D عملگر مشتقگیری روی P_n باشد. یعنی، $D(f) = f'$. دراین‌صورت $D^۲(f) = D(D(f)) = D(f') = f''$. لـذا، $D^۲$، f را به مشتق دوم f می‌برد. در حالت کلی، $D^k(f) = f^{(k)}$. یعنی، D^k، f را به مشتق k ام f می‌برد. چون مشتق $(n + ۱)$ ام یک چند جمله‌ای در P_n صفر است، دیده می‌شودکه $D^{n+۱} = ۰$. عملگرهایی با این خاصیت را که توانی ازآنها صفر است **پوچ توان** می‌نامند.

مثال ۵ فرض کنیم P_θ تبدیل تصویری روی $\mathbf{R}^۲$ باشد (ر.ک. بخش ۲.۵). به یاد داریم که $P_\theta(\mathbf{v})$ برداری است واقع برخط lای که بامحور xها زاویهٔ θ درجه‌می‌سازد و $P_\theta(\mathbf{v})$

از رسم عمودی از انتهای $\mathbf{v}$ بر l به‌دست می‌آید (ر. ک. شکل ۱۲.۵). اگر $\mathbf{u}$ برداری روی l باشد، می‌بینیم که $P_\theta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. لذا، چون $P_\theta(\mathbf{v})$ روی l قرار دارد، $P_\theta(P_\theta(\mathbf{v})) = P_\theta(\mathbf{v})$، یا $P_\theta^2(\mathbf{v}) = P_\theta(\mathbf{v})$. ازآنجا که این مطلب به ازای هر $\mathbf{v}$ در $\mathbf{R}^2$ درست است، داریم $P_\theta^2 = P_\theta$.



شکل ۱۲.۵

این‌گونه عملگرها را که مساوی با مربعشان هستند **خود توان** می‌نامند.

درمثال ۴ ازبخش ۱.۵، موردی را بررسی کردیم که درآن، سه شرکت بازارمحصول معینی را در دست داشتند. در آن مثال تبدیلی خطی وجود داشت که تغییرات بازار را از یک سال به‌سال دیگر پیش‌بینی می‌کرد. درمثالی که اکنون می‌آید، می‌بینیم که اگر چنین جریانی درمدت زمانی‌طولانی ادامه یابد، چه‌اتفاقی می‌افتد. برای ساده شدن مسئله، فرض می‌کنیم بجای سه شرکت دو شرکت وجود داشته باشند.

مثال ۶ دو شرکت A و B بازار محصول معینی را به‌طور کامل در دست دارند. هرسال ۷/۱۰ مشتریان A پا برجا می‌مانند، ولی ۳/۱۰ آنها به B روی می‌آورند. همچنین در هرسال ۶/۱۰ مشتریان B، خریدار B باقی می‌مانند ولی ۴/۱۰ آنها به A می‌پیوندند. چشم‌انداز وضع هر شرکت را درمدت طولانی توصیف کنید.

فرض‌کنیم $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ معرف وضع بازار در زمان معینی باشد. دراینجا x کسری از بازار است که در دست A است و y کسری که در اختیار B می‌باشد. برای مثال اگر A، ۲/۵ بازار را در دست داشته باشد داریم $x = ۲/۵$ و $y = ۳/۵$. فرض کنیم $T(\mathbf{v})$ وضع بازار در یک سال بعد باشد. دراین صورت همانند مثال ۴، از بخش ۱.۵، $T\cdot T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} ۰٫۷ & ۰٫۴ \\ ۰٫۳ & ۰٫۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ عملگری خطی است که وضع بازار را درحال حاضر به‌وضع بازار دریک سال بعد تبدیل می‌کند. اگر $T(\mathbf{v})$ وضع بازار دریک سال‌بعد باشد، $T^2(\mathbf{v})$ وضع بازار در ۲ سال بعد است. درحالت کلی، وضع بازار در k سال بعد $T^k(\mathbf{v})$

است. پس، برای حل مسئله باید توانهای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰٫۷ & ۰٫۴ \\ ۰٫۳ & ۰٫۶ \end{bmatrix}$ را حساب کنیم. چند تا از توانهای A عبارت‌اند از:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰٫۶۱ & ۰٫۵۲ \\ ۰٫۳۹ & ۰٫۴۸ \end{bmatrix},\qquad A^۳=\begin{bmatrix} ۰٫۵۸۳ & ۰٫۵۵۶ \\ ۰٫۴۱۷ & ۰٫۴۴۴ \end{bmatrix},$$
$$A^۴=\begin{bmatrix} ۰٫۵۷۴۹ & ۰٫۵۶۶۸ \\ ۰٫۴۲۵۱ & ۰٫۴۳۳۲ \end{bmatrix},\qquad A^۵=\begin{bmatrix} ۰٫۵۷۲۴۷ & ۰٫۵۷۰۰۴ \\ ۰٫۴۲۷۵۳ & ۰٫۴۲۹۹۶ \end{bmatrix}.$$

با نگاهی اجمالی به نظر می‌رسد که این دنباله از ماتریسها به سمت یک حد میل می‌کند ودرحقیقت نیزچنین است. دراینجا، حدمزبور درواقع $\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} & \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}$ می باشد (تذکر: $... ۰٫۵۷۱۴۲۸۵ = ۴/۷$). این بدان معنی است که در حد، وضع بازار با $\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} & \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷}(x+y) \\ \frac{۳}{۷}(x+y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}$ مشخص می‌شود. حتی پس از پنج سال این توزیع تا ۰٫۰۰۱ تقریب صحیح است.

درمورد این مثال، دونکته شایان توجه است. اول اینکه وضع اولیهٔ بازار هرچه باشد، بازار به‌طور کاملاً سریع به توزیع $\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}$ میل می‌کند. بعلاوه، اگر وضع اولیه $\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}$ باشد، درآن صورت، چون $\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\right)$، وضع بازار تغییر نمی‌کند.

همانند آنچه در مثال ۴ ازبخش ۱.۵ دیدیم، A نمونه‌ای از یک ماتریس تصادفی است. بسیاری ازماتریسهای تصادفی‌این خاصیت را دارندکه دنبالهٔ توانهای‌آنهاهمگراست. (تذکر: اگر خواننده‌ای درمورد حد دنبالهٔ A، $A^۲$، $A^۳$، . . . شک داشته باشد، از طریق استقرا بسادگی می‌توان نشان داد که

$$A^n=\begin{bmatrix} \frac{۴}{۷} & \frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}+\frac{۱}{۷}\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^n\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}.)$$

با توجه به نقش مهمی که وارون ماتریس در بعضی مسائل مربوط به‌ماتریسها دارد، طبعاً این سؤال پیش می‌آید که آیا مفهوم وارون برای تبدیلات خطی نیز وجود دارد؟

تعریف فرض کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دوفضای برداری V و W باشد. اگر یک تبدیل خطی $S: W \to V$ وجود داشته باشد به طوری‌که $T \circ S = I_W$ و $S \circ T = I_V$، آنگاه T **وارون پذیر** است و S را **وارون** T می‌نامند.

اگر تبدیل‌خطی T وارون داشته باشد، این وارون یکتاست. برای ملاحظهٔ این‌مطلب، فرض می کنیم S_1 و S_2 دوتبدیل خطی از W به V باشند که درشرایط تعریف وارون صدق می‌کنند. دراین صورت

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1 \circ I_W && \text{(بنا به قضیهٔ ۲)} \\ &= S_1 \circ (T \circ S_2) && \text{(چون طبق فرض، } T\circ S_2 = I_W) \\ &= (S_1 \circ T) \circ S_2 && \text{(بنا به قضیه ۳)} \\ &= I_V \circ S_2 && \text{(چون طبق فرض، } S_1\circ T = I_V) \\ &= S_2 && \text{(بنا به قضیهٔ ۲)} \end{aligned}$$

لذا، اگر وارون وجود داشته باشد، یکتاست. وارون تبدیل خطی T را عموماً با T^{-1} نشان می‌دهند.

مثال ۷ فرض کنیم A ماتریس وارون پذیر $n \times n$ ای باشد و T_A عملگری خطی روی $\mathbf{R}^n$ که با ضابطهٔ $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ تعریف می‌شود. در این صورت، عملگر $T_{A^{-1}}$ روی $\mathbf{R}^n$ نیز وجود دارد که به صورت $T_{A^{-1}}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ تعریف می‌شود. عملگر $T_A \circ T_{A^{-1}}$ را می‌یابیم.

$$(T_A \circ T_{A^{-1}})(\mathbf{x}) = T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = T_A(A^{-1}\mathbf{x}) = A(A^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

پس، می بینیم که $T_A \circ T_{A^{-1}} = I$. همین طور، می‌توان نشان داد که $T_{A^{-1}} \circ T_A = I$. در نتیجه T_A وارون پذیر است و $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.

مثال ۸ فرض کنیم $S: P_n \to P_n$ عملگری خطی باشد که چند جمله‌ای $f(x)$ را به چند جمله‌ای $f(x+1)$ می‌برد، یا $(S(f))(x) = f(x+1)$. ازاینرو x به $x+1$، x^2 به $(x+1)^2$، تبدیل می‌شوندوهمین طور الی آخر.

حال، اگر $T: P_n \to P_n$ عملگری خطی باشد که $f(x)$ را به $f(x-1)$ می‌برد، یا $(T(f))(x) = f(x-1)$، آنگاه S وارون پذیر است و $S^{-1} = T$.

زیرا داریم

$$\begin{aligned} ((S\circ T)(f))(x) &= (S(T(f)))(x) && \text{(بنا به تعریف } S\circ T) \\ &= (T(f))(x+1) && \text{(بنا به تعریف } S) \\ &= f((x+1)-1) && \text{(بنا به تعریف } T) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

از این قرار، به ازای هر f، داریم $(S\circ T)f = f$، درنتیجه $S\circ T = I$. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که $T\circ S = I$.

مفهوم وارون یک عملگر خطی با مفهوم یکریختی رابطهٔ نزدیکی دارد. این ارتباط درقضیهٔ زیر روشن می‌گردد.

قضیهٔ ۵ فرض کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دوفضای برداری V و W باشد. در این صورت T وارون پذیر است اگر و فقط اگر T یکریختی باشد.

اثبات فرض کنیم T وارون پذیر باشد و $T^{-1}: W \to V$ وارون آن. اگر $T(\mathbf{x}) = 0$، آنگاه $T^{-1}(T(\mathbf{x})) = T^{-1}(0) = 0$. اما $T^{-1}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. لذا، $\mathbf{x} = 0$. چون $T(\mathbf{x}) = 0$ ایجاب می‌کند $\mathbf{x} = 0$، دیده می‌شود که $N_T = 0$. اکنون نشان می‌دهیم که T پوشاست. اگر $\mathbf{y}$ برداری در W باشد، فرض کنیم $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y})$. پس

$$T(\mathbf{x}) = T(T^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}.$$

از اینرو، $\mathbf{y}$ نگارهٔ $\mathbf{x}$ تحت T است. از اینجا نتیجه می‌شود که T پوشاست. چون T یک به یک و پوشاست، یکریختی است.

حال فرض می‌کنیم T یکریختی باشد. باید وارونی برای آن بسازیم. چون T پوشاست، برای $\mathbf{y} \in W$ یک بردار $\mathbf{x} \in V$ وجود دارد به نحوی که $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. تعریف می‌کنیم $S(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. در این صورت S خوش تعریف است، زیرا اگر $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$ و $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}$، فرض یک به‌یک بودن T دلالت براین می‌کند که $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. لذا، S تابعی از W به V است.

اکنون باید نشان دهیم که S خطی است. فرض کنیم $\mathbf{y}_1$ و $\mathbf{y}_2$ بردارهایی در W باشند. دراین صورت بردارهای $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$ در V وجود دارند به قسمی که $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ و $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$، و بنا به خطی بودن T، $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. بنابراین، طبق تعریف S، $S(\mathbf{y}_1) = \mathbf{x}_1$، $S(\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_2$، و $S(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. از اینرو $S(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = S(\mathbf{y}_1) + S(\mathbf{y}_2)$.

حال، فرض می‌کنیم $\mathbf{y}$ متعلق به W و α یک اسکالر باشد. چون T پوشاست، به‌ازای $\mathbf{x}$ ای در V، $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. پس بنا به خطی بودن T، $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{y}$. طبق تعریف S، $S(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ و $S(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}$. از این قرار $S(\alpha\mathbf{y}) = \alpha S(\mathbf{y})$. درنتیجه S خطی است.

اکنون ادعا می‌کنیم که $S\circ T = I_V$ و $T\circ S = I_W$. بردار $\mathbf{x}$ ای را از V انتخاب و فرض می‌کنیم $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. طبق تعریف S داریم $S(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. لذا

$(S\circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$	(بنا به تعریف $S\circ T$)
$= S(\mathbf{y})$	[چون $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$]

(طبق تعریف S) $\quad = \mathbf{x}$

بنابراین، ثابت کرده‌ایم که $S \circ T = I_V$.

سپس، بردار $\mathbf{y}$ ای را از W انتخاب می‌کنیم. چون T پوشاست، $\mathbf{x}$ ای در V وجود دارد چنان که $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. بنا به تعریف S، داریم $S(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.
پس

$$
\begin{aligned}
(T\circ S)(\mathbf{y}) &= T(S(\mathbf{y})) && (\text{طبق تعریف } T\circ S)\\
&= T(\mathbf{x}) && (\text{بنا به تعریف } S)\\
&= \mathbf{y} && (\text{چون } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y})
\end{aligned}
$$

درنتیجه $T \circ S = I_W$.

به این ترتیب، ثابت کرده‌ایم که هریکریختی دارای وارون است. ●

دربعضی از انواع مسائل، روشی را که هم اینک شرح داده شد، می‌توان برای یافتن وارون یک تبدیل خطی مفروض به‌کاربرد. درواقع، اگر $T: V \to W$ یکریختیی بین V و W باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، ...، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V، ازقضیهٔ ۱ دربخش ۶.۵ نتیجه می‌شود که $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$، $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$، ...، $T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$ پایه‌ای برای W است. از اینرو T^{-1} تابعی خطی است که با ضابطهٔ

$$T^{-1}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{x}_1 ، T^{-1}(\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_2 ، \ldots ، T^{-1}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{x}_n$$

تعریف می‌شود. ارائه یک مثال، می‌تواند به روشن شدن این روش کمک کند.

مثال ۹ تبدیل خطی $T(f) = f + f'$ از P_4 به P_4 را، که در مثال ۴ از بخش ۶.۵ تعریف شد، درنظر می‌گیریم. دیدیم که T یک یکریختی روی P_4 بود. نگارهٔ بردارهای پایهٔ ۱، x، x^2، x^3، x^4 راحساب‌می‌کنیم: $T(1) = 1$، $T(x) = 1 + x$، $T(x^2) = 2x + x^2$، $T(x^3) = 3x^2 + x^3$، $T(x^4) = 4x^3 + x^4$. پس

$$T^{-1}(1) = 1,\ T^{-1}(1 + x) = x,\ T^{-1}(2x + x^2) = x^2,$$
$$T^{-1}(3x^2 + x^3) = x^3,\ T^{-1}(4x^3 + x^4) = x^4$$

سپس، با استفاده از خطی بودن T^{-1}

$$
\begin{aligned}
&T^{-1}(1) = 1,\\
&T^{-1}(x) = T^{-1}((x + 1) - 1) = x - 1,\\
&T^{-1}(x^2) = T^{-1}((x^2 + 2x) - 2x) = x^2 - 2(x - 1) = x^2 - 2x + 2\\
&T^{-1}(x^3) = T^{-1}((x^3 + 3x^2) - 3x^2) = x^3 - 3(x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}
$$

$$= x^3 - 3x^2 + 6x - 6,$$
$$T^{-1}(x^4) = T^{-1}((x^4 + 4x^3) - 4x^3) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$$

چون نگارهٔ هریک از عناصر پایه تحت T^{-1} معلوم است، با استفاده از خطی بودن می‌توانیم نگارهٔ هر بردار را تحت T^{-1} تعیین کنیم.

تمرینات

۱. فرض‌کنید S، T، و U عملگرهایی خطی‌روی R^2 باشندکه به‌صورت‌زیر تعریف‌می‌شوند:

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$
$$U\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ماتریسهای وابسته به هر یک از تبدیلات خطی زیر را بیابید.

(الف) $S \circ T$ (ب) $T \circ S$ (ج) S^2 (د) S^3 (ه) S^{-1}

(و) $S \circ (T \circ U)$ (ز) $(S \circ T) \circ U$ (ح) $S \circ T - T \circ S$

(ط) $T \circ U - U \circ T$ (ی) $U^2 - I_2$

۲. فرض‌کنید S، T، و U عملگرهایی‌خطی‌روی P_3 باشندکه به‌صورت $S(f) = f' + f$، $T(f) = f + xf'$، و $U(f) = f''$ تعریف می‌شوند. عملگرهای خطی زیر را حساب کنید.

(الف) $S \circ U$ (ب) $U \circ S$ (ج) $U \circ T$ (د) $T \circ U$ (ه) $T \circ U - U \circ T$

(و) U^2 (ز) S^2 (ح) S^3 (ط) $T \circ S$ (ی) $S \circ T$

۳. کدامیک از ماتریسهای زیر عملگر خطی وارون پذیر روی $\mathbf{R}^n$ القا می‌کند؟ وارون را در صورت وجود بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

۴. کدامیک از عملگرهای زیر روی P_3 وارون پذیرند؟

(الف) $D(f) = f'$ (ب) $S(f)(x) = f(x) + f(-x)$ (ج) $T(f) = f + 2f'$

۵. فرض کنید a، b، و c اعدادی حقیقی باشند و T عملگری خطی روی P_n باشد که با ضابطهٔ $T(f) = af + bxf' + cx^2f''$ تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که $T(x^n) = (a + bn + cn(n-1))x^n$.

(ب) اگر a، b، و c مثبت باشند، نشان دهید که T وارون پذیر است.

(ج) مقادیرغیرصفری از a، b، و c راانتخاب‌کنیدبه‌طوری‌که T وارون‌ناپذیر باشد.

۶. تبدیلی خطی از P_2 به $\mathbf{R}^3$ به صورت $T(f) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(0) \\ f(-1) \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T وارون پذیر است.

۷. یک تولید کنندهٔ اثاثهٔ خانه دو نوع قفسهٔ کتاب تولید می‌کند. نوع اول به ۳ متر مربع چوب، ۴۰ میخ، و ۲ ساعت کار احتیاج دارد. نوع دوم به ۱۰ متر مربع چوب، ۶۰ میخ، و ۳ ساعت کار نیاز دارد.

فرض کنید $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ برداری باشد که مؤلفهٔ i ام آن تعداد قفسه‌هایی است که باید از نوع iام ساخته‌شود ونیز فرض‌کنید $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ نمایشگر تعداد واحدهای چوب، میخ، و ساعت کاری باشد که برای تولید x_1 قفسه از نوع ۱ و x_2 قفسه از نوع ۲ مورد نیاز است.

(الف) ماتریسی مانند A بیابید به طوری که $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

قیمت یک واحد چوب، میخ، و ساعت کار، بترتیب، ۷۰ ریال، ۱/۴ ریال، و ۲۴۵ ریال است. فرض کنید $S(\mathbf{u})$ قیمت a واحد چوب، b واحد میخ، و c ساعت کار باشد.

(ب) ماتریسی مانند B بیابید به نحوی که $S(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}$.

(ج) تابع $S \circ T(\mathbf{v})$ را پیدا کنید و آن را تفسیر کنید.

یک قفسهٔ کتاب از نوع ۱ را به‌قیمت ۷۰۰۰ ریال و یک قفسه کتاب از نوع ۲ را به قیمت ۱۱۲۰۰ ریال می‌فروشند. فرض کنید $R(\mathbf{v})$ قیمت کل x_1 واحد از نوع ۱ و x_2 واحد از نوع ۲ باشد

(د) ماتریسی مانند C بیابید به قسمی که $R(\mathbf{v}) = C\mathbf{v}$.

(ه) تابع $(R - S \circ T)(\mathbf{v})$ را محاسبه و تفسیر کنید.

۸. با استفاده از استقرا ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -b \\ -a & b \end{bmatrix}$$

۹. فرض‌کنید a و b اعدادی حقیقی باشند به‌قسمی‌که $1 > a > 0$ و $1 > b > 0$. فرض‌کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

نشان دهید که دنبالهٔ ماتریسهای A، A^2، A^3، . . .، به $\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix}$ میل می‌کند.

۱۰. در مثال ۶ از این بخش، فرض کنید که شرکت A تعداد $1 - a$ نفر از مشتریان خود را حفظ می‌کند و a نفر از مشتریان به B روی می‌آورند. همچنین $1 - b$ نفرازمشتریان B خریدار B می‌مانند و b نفر از آنها به A می‌پیوندند. فرض کنید $1 > a > 0$ و

$1 > b > 0$. چشم‌انداز دراز مدت هر یک از شرکتها را معین کنید. (راهنمایی: از تمرینهای ۸ و ۹ استفاده کنید.)

۱۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد و

$$T_1(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad \text{و} \quad T_2(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

(الف) نشان دهید که $T_1{}^2 = T_1$. یعنی T_1 خود توان است.

(ب) نشان دهید که $T_2^2 = T_2$. یعنی T_2 خود توان است.

(ج) نشان دهید که $T_1 T_2 = T_2 T_1 = 0$.

۱۲. فرض کنید $T: V \longrightarrow V$ عملگری خطی روی فضای برداری V باشد به طوری که $T^2 = I_V$. نشان دهید که

(الف) اگر $T_1 = \frac{1}{2}(1 + T)$، آنگاه $T_1^2 = T_1$. یعنی T_1 خود توان است.

(ب) اگر $T_2 = \frac{1}{2}(I - T)$، آنگاه $T_2^2 = T_2$. یعنی T_2 خود توان است.

(ج) $T_1 T_2 = T_2 T_1 = 0$ و $T_1 + T_2 = I_V$.

(د) $R_{T_2} = N_{T_1}$ و $R_{T_1} = N_{T_2}$.

(ه) اگر $V = P_n$، فضای چندجمله‌ایهای یک متغیره با متغیر x واز درجهٔ نابیشتر از n باشد و $T(f(x)) = f(-x)$، نشان دهیدکه $T^2 = I_{P_n}$. عملگرهای T_1 و T_2 که بر طبق تعریف (الف) و (ب) به دست می‌آیند، کدام‌اند؟ کدام چند جمله‌ایها متعلق به R_{T_1} و R_{T_2} می‌باشند؟

(و) اگر $V = P_n$ مانند قسمت (ه)، و $(T(f))(x) = f(1 - x)$، نشان دهیدکه $T^2 = I_{P_n}$

۱۳. اگر V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای برای V، نشان دهیدکه‌عملگر $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2$، $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_3$، . . .، $T(\mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{x}_n$، $T(\mathbf{x}_n) = \alpha \mathbf{x}_1$ دررابطهٔ $T^n = \alpha I_V$ صدق می‌کند. اگر $\alpha \neq 0$، T^{-1} چیست؟

۱۴. فرض کنید V_1، V_2، و V_3 فضای برداری،و $S: V_1 \longrightarrow V_2$ و $T: V_2 \longrightarrow V_3$ دوتبدیل خطی باشند.

(الف) اگر S و T، هردو، یک به‌یک باشند، نشان‌دهید که $T \circ S$ یک‌به‌یک است.

(ب) اگر S و T، هردو، پوشا باشند، نشان دهید که $T \circ S$ پوشاست.

(ج) اگر S و T، هردو، یکریختی باشند، نشان دهید که $T \circ S$ یکریختی است و

$$(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$$

۱۵. فرض کنید $T: V \longrightarrow V$ و $S: V \longrightarrow V$ عملگرهایی خطی روی فضای برداری متناهی‌البعد V باشند.

(الف) اگر $T \circ S$ یک به یک باشد، نشان دهید که T یکریختی است.

(ب) اگر $T \circ S$ پوشا باشد، نشان دهید که T یکریختی است.

(ج) اگر T^k یکریختی باشد (k یک عدد صحیح مثبت است)، نشان دهید که T یکریختی است.

(د) اگـر T^k وارون پذیر باشد (k یک عدد صحیح مثبت است)، و $S = (T^k)^{-1}$، نشان دهید که $T^{-1} = T^{k-1} \circ S$.

۱۶. اگر T و S عملگرهایی خطی روی فضای برداری V باشند و

$$(T + S)^2 = T^2 + 2S \circ T + S^2،$$

نشان دهید که S و T جابجا می‌شوند. یعنی $S \circ T = T \circ S$.

۱۷. اگر T تبدیلی خطی از فضای برداری متناهی‌البعد V بر روی فضای برداری W باشد، نشان دهید که

(الف) $\dim W$ متناهی است و $\dim W \leqslant \dim V$.

(ب) تبدیلی خطی مانند $S: W \to V$ وجود دارد به‌قسمی که $T \circ S = I_W$.

۱۸. اگر T یک تبدیل خطی یک به یک ازفضای برداری V به فضای برداری متناهی‌البعد W باشد، نشان دهید که

(الف) V متناهی‌البعد است.

(ب) تبدیلی خطی مانند $S: W \to V$ وجود دارد به طوری که $S \circ T = I_V$.

۱۹. اگر T عملگری خطی روی فضای بـرداری V باشد و اگـر $T^2 - T + I_V = 0$، نشان دهید که T وارون پذیر است.

۲۰. فرض کنید $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ عملگری خطی روی $\mathbf{R}^n$ باشد. اگـر $m < n$، و تبدیـلات خطی $S: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ و $U: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ وجود داشته باشند به‌نحوی کـه $T = U \circ S$، نشان دهید که $r(T) \leqslant m$ و T وارون پذیر نیست.

۲۱. اگر T عملگری خطی روی فضـای برداری متناهی‌البعد V بـاشد، نشـان دهید کـه $r(T) = r(T^2)$ اگر و فقط اگر $N_T \cap R_T = 0$. یعنی، فضای پوچ و فضای مقـادیر T فقط در بردار صفر اشتراک دارند.

۲۲. فـرض کنید D عملگـر مشتقگیـری روی P_n باشد و T_α عملگری کـه بـا ضابطهٔ $T_\alpha(f)(\mathbf{x}) = f(\alpha\mathbf{x})$ تعریف می‌شود. نشان دهید که $D \circ T_\alpha = \alpha T_\alpha \circ D$.

۲۳. فرض‌کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد.

(الف) اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت k داشته بـاشیم $R(T^k) = R(T^{k+1})$، نشان دهید که $R(T^{k+1}) = R(T^{k+2})$.

(ب) اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $N(T^k) = N(T^{k+1})$، نشان دهید که $N(T^{k+1}) = N(T^{k+2})$.

۲۴. فرض کنید V یک فضای برداری باشد و $\mathbf{x}_1$، $\mathbf{x}_2$، . . .، $\mathbf{x}_n$ پایه‌ای بـرای V. فرض کنید $T: V \to V$ عملگری خطی باشد کـه به صورت $T(\mathbf{x}_1) = \lambda_1 \mathbf{x}_1$، $T(\mathbf{x}_2) = \lambda_2 \mathbf{x}_2$،

$\ldots, T(\mathbf{x}_n) = \lambda_n \mathbf{x}_n$ به ازای اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ اگر $i \neq j$)، تعریف می‌شود. فرض کنید $T\circ S = S\circ T$، که S عملگری خطی روی V است. نشان دهید که اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ وجود دارند به قسمی که

$$S(\mathbf{x}_1) = \alpha_1 \mathbf{x}_1, S(\mathbf{x}_2) = \alpha_2 \mathbf{x}_2, \ldots, S(\mathbf{x}_n) = \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

۲۵. فرض کنید $T: V \to V$ عملگری خطی روی فضای برداری متناهی‌البعد V باشد. نشان دهید که T با سایر عملگرهای خطی‌روی V جابجا می‌شود اگر وفقط اگر $T = \alpha I_V$. یعنی اگر و فقط اگر T مضرب اسکالری از عملگر همانی روی V باشد.

۲۶. فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند. فرض کنید $\mathbf{x}$ بردار ثابت غیرصفری در V باشد. نشان دهیدکه تابعی از $L(V, W)$ به W، که به صورت $L(T) = T(\mathbf{x})$ تعریف می‌شود، یک تبدیل خطی از $L(V, W)$ بر روی W است.

۲۷. اگر $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ عملگری خطی روی $\mathbf{R}^n$ با رتبهٔ r باشد، نشان دهید که تبدیل‌خطی پوشای $S: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$ و تبدیل خطی یک به یک $U: \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^n$ وجود دارند به طوری که $T = U\circ S$. این نتیجه را برحسب ماتریسها تعبیر کنید.

۲۸. فرض کنید T عملگری خطی روی $\mathbf{R}^3$ باشد به طوری که $T \neq 0$ ولی $T^2 = 0$. نشان دهید که $r(T) = 1$.

۲۹. اگر $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ عملگری خطی باشد به نحوی که $T^{n-1} \neq 0$ ولی $T^n = 0$، نشان دهید که $r(T) = n - 1$. یک مثال از چنین T ای ارائه دهید.

۳۰. اگر $T: V \to V$ و $S: V \to V$ عملگرهایی خطی روی فضای برداری V باشند، نشان دهید که $T\circ S = 0$ اگر و فقط اگر $R_S \subset N_T$.

۳۱. اگر $T: V \to V$ عملگری خطی روی فضای برداری متناهی‌البعد V باشد و $T^2 = 0$، نشان دهید که $r(T) \leqslant \frac{1}{2}\dim V$.

۸ نمایش ماتریسی تبدیل خطی

فرض کنیم $T: V \to W$ تبدیلی خطی بین دو فضای برداری متناهی‌البعد V و W باشد. اگر $V = \mathbf{R}^n$ و $W = \mathbf{R}^m$، دربخش ۲.۵، دیدیم که با استفاده از پایه‌های متعارف $\mathbf{R}^m$ و $\mathbf{R}^n$، می‌توان ماتریسی $m \times n$ مانند A یافت به قسمی که $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. در این بخش با استفاده از پایه‌های دلخواهی برای V و W، عمل مشابهی را انجام می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V و $\mathcal{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ پایه‌ای برای W باشد. چون $\mathcal{C}$ پایه‌ای برای W است، اسکالرهای a_{ij} وجود دارند به طوری که

$$T(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{y}_i$$

یا

$$T(\mathbf{x}_j) \underset{\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ماتریس $m \times n$ی A_T را به‌صورت $A_T = [a_{ij}]_{(mn)}$ تعریف می‌کنیم. توجه کنیدکه ستون j ام A_T، m تایی مختصات $T(\mathbf{x}_j)$ نسبت بـه پایهٔ $\mathscr{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}$ برای W است.

اگر $\mathbf{x}$ متعلق بـه V باشد، می‌توان به $\mathbf{x}$، مختصات n تایی آن را نسبت بـه پایهٔ $\mathscr{B}$ نظیر کرد.

$$\mathbf{x} \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

که البته، بدین معنی است که $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$.

اگر m- برداری به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ادعا می‌کنیم که

$$T(\mathbf{x}) \underset{\mathscr{C}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

یا به‌عبارت دیگر

$$T(\mathbf{x}) = \beta_1\mathbf{y}_1 + \beta_2\mathbf{y}_2 + \dots + \beta_m\mathbf{y}_m$$

برای اثبات این حکم، متذکر می‌شویم که

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{x}_j$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(\mathbf{x}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) \mathbf{y}_i \end{aligned}$$

پس، مختص iام $T(\mathbf{x})$ نسبت به پایهٔ $\mathscr{C} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ عبارت است از:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j$$

به عبارت دیگر، همین که پایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ برای V و پایه‌ای مانند $\mathcal{C}$ برای W معین شود، یک ماتریس A_T وجود دارد که دارای خاصیت زیر است: حاصلضرب A_T در بردار مختصات $\mathbf{x}$ نسبت به $\mathcal{B}$، بردار مختصات $T(\mathbf{x})$ نسبت به $\mathcal{C}$ است.

اگر $V = W$، یعنی اگر $T:V \rightarrow V$ عملگری خطی روی V باشد، معمول است که‌در هر دو فضای اولی و دومی از یک پایه استفاده شود (یعنی فرض شود $\mathcal{C} = \mathcal{B}$). اگر $I_V : V \rightarrow V$ عملگر همانی روی V و $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، از تساوی $I_V\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j$ نتیجه می‌شود که ماتریس وابسته به I_V، ماتریس همانی از مرتبهٔ n، یعنی I_n است. همین طور ماتریس وابسته به عملگر صفر، ماتریس صفر است.

مثال ۱ فرض کنیم M_{22} نشانگر فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 باشد. تبدیل خطی T از M_{22} به $\mathbf{R}^2$ را،که به‌صورت $T(A) = A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود، درنظرمی‌گیریم. T خطی است، زیرا اگر A و B متعلق به M_{22} باشند و α یک اسکالر باشد،

$$T(A+B) = (A+B)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = T(A) + T(B)$$

و

$$T(\alpha A) = \alpha A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha T(A)$$

برای M_{22}، پایهٔ $\mathcal{B}$ متشکل از

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}، E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}، E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}، E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و برای $\mathbf{R}^2$، پایهٔ $\mathcal{C}$ متشکل از

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}، \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آنها نمایش ماتریسی T را حساب می‌کنیم.

$$T(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}، T(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}، T(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

از اینرو $A_T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. تذکر اینکه ماتریس A_T با قرار دادن مختصات $T(E_1)$، $T(E_2)$، $T(E_3)$، و $T(E_4)$، نسبت به پایهٔ $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$ در ستونهای متوالی به دست می‌آید.

اگر $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه $M \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ و بنابراین

$$T(M) \underset{\mathcal{C}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳a + ۲b \\ ۳c + ۲d \end{bmatrix}$$

مثال ۲ فرض کنیم $P_۳$ به طریق معمولی تعریف شده باشد و $D: P_۳ \to P_۳$ عملگر مشتقگیری، $D(f) = f'$، باشد. پایهٔ ۱، x، $x^۲$، $x^۳$ را برای $P_۳$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $D(۱) = ۰$، $D(x) = ۱$، $D(x^۲) = ۲x$، $D(x^۳) = ۳x^۲$. پس ماتریس A_D عبارت است از:

$$A_D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

که با قرار دادن مختصات $D(۱)$، $D(x)$، $D(x^۲)$، و $D(x^۳)$ نسبت به پایهٔ ۱، x، $x^۲$، $x^۳$ در ستونهای متوالی به دست‌آمده است. اگر $f = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \alpha_۲ x^۲ + \alpha_۳ x^۳$، آنگاه

$$f \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_۰ \\ \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix} \text{ و } D(f) \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_۰ \\ \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \alpha_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ ۲\alpha_۲ \\ ۳\alpha_۳ \\ ۰ \end{bmatrix}،$$

یعنی، $D(f) = \alpha_۱ + ۲\alpha_۲ x + ۳\alpha_۳ x^۲$.

نمایش ماتریسی تبدیل خطی، که به پایهٔ انتخاب شده بستگی دارد، اغلب می‌تواند مسائل مربوط به تبدیلات خطی را به مسائل مربوط به ماتریسها و معادلات خطی، یعنی مسائلی که برای‌آنها روشهای محاسباتی قابل اجرا ارائه داده‌ایم، تبدیل کند.

برای مثال، اگر T تبدیلی خطی از فضای برداری V به فضای برداری W باشد، می‌خواهیم فضای پوچ و رتبهٔ T را بیابیم. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، و $\mathcal{C} = \{\mathbf{y}_۱, \mathbf{y}_۲, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ پایه‌ای برای W. فرض کنیم A_T ماتریس $m \times n$ وابسته به T نسبت به پایه‌های فوق باشد. اگر $\mathbf{x}$ متعلق به V باشد، $\mathbf{x} \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_۱ \\ \alpha_۲ \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$،